DIE STRUKTUR ABGESCHLOSSENER IDEALE IN GEWISSEN (DFN)- BZW. (FN)-ALGEBREN HOLOMORPHER FUNKTIONEN

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Düsseldorf

vorgelegt von
RÜDIGER WINFRIED BRAUN
aus Düsseldorf

Düsseldorf
1986

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543909_0089

Die Struktur abgeschlossener Ideale in gewissen (DFN)- bzw. (FN)-Algebren holomorpher Funktionen

I N A U G U R A L - D I S S E R T A T I O N

zur

Erlangung des Doktorgrades der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität Düsseldorf

vorgelegt von

Rüdiger Winfried Braun

aus Düsseldorf

Düsseldorf 1986

Gedruckt mit Genehmigung der Mathematisch-
Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Düsseldorf

1. Referent: Prof. Dr. R. Meise
2. Referent: Prof. Dr. G. Fischer
3. Referent: Prof. Dr. D. Vogt

Tag der mündlichen Prüfung: 18.7.1986

Inhaltsverzeichnis

Einleitung 2

1. Potenzreihenräume und linear topologische Invarianten 6

2. Ideale in lokal multiplikativ konvexen Algebren . . 12

3. Algebren ganzer Funktionen einer komplexen Veränderlichen mit Wachstumsbedingungen

A Definitionen und allgemeine Sätze 27

B Erzeugendensysteme abgeschlossener Ideale 40

C Die topologische Struktur abgeschlossener Ideale . 58

Literaturverzeichnis 64

Zusammenfassung 66

Einleitung

Ziel dieser Arbeit ist es, die topologische Struktur von Verschwindungsidealen I diskreter Varietäten (mit Vielfachheiten) in gewissen Algebren holomorpher Funktionen zu bestimmen. Dabei betrachten wir einerseits Algebren aller holomorphen Funktionen auf geeigneten Räumen, etwa auf gewissen Steinschen Mannigfaltigkeiten oder auf unendlichdimensionalen offenen Polyzylindern, andererseits Algebren ganzer Funktionen in einer Veränderlichen, die Gewichtsbedingungen genügen. Beispiele hierfür sind die Räume E_ρ (bzw. E_ρ^0) aller ganzen Funktionen von der Ordnung $\rho>0$ und endlichem Typ (bzw. Typ 0) oder echt kleinerer Ordnung. In diesen und anderen Fällen zeigen wir, daß I als topologischer Vektorraum isomorph zur Algebra ist. Speziell besitzt I eine Schauderbasis.

Wir gehen zunächst auf die Untersuchung von Algebren mit Gewichtsbedingungen ein:
Ist p eine Gewichtsfunktion, so betrachten wir die (DFN)-Algebra

$$A_p = \{f\in H(\mathbb{C}) \mid \text{es gibt } A>0 \text{ mit } \sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)|\exp(-Ap(z))<\infty\},$$

bzw. die (FN)-Algebra

$$A_p^0 = \{f\in H(\mathbb{C}) \mid \text{für alle } \varepsilon>0: \sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)|\exp(-\varepsilon p(z))<\infty\}.$$

Aus einem klassischen Satz von Lindelöf folgt, daß für viele Gewichtsfunktionen p die Algebra A_p abgeschlossene Ideale enthält, welche keine Hauptideale sind, beispielsweise ist dies für $\mathrm{Exp} := E_1$ der Fall.
Wir zeigen als eines der Hauptergebnisse dieser Arbeit: Jedes abgeschlossene Ideal in A_p bzw. in A_p^0 wird algebraisch von zwei Elementen erzeugt. Daraus folgern wir: Ist A_p isomorph zum Dualen eines Potenzreihenraums, so sind alle abgeschlossenen Ideale $I\neq\{0\}$ in A_p als topologische Vektorräume isomorph zu A_p. Ist A_p^0 isomorph zu einem Potenzreihenraum unendlichen Typs, wobei der Isomorphismus gewisse Zusatzbedingungen erfüllt, so ist jedes abgeschlossene Ideal $I\neq\{0\}$ in A_p^0 linear topologisch isomorph zu A_p^0.

Beim Beweis der Existenz eines endlichen Erzeugendensystems für abgeschlossene Ideale I in A_p benutzen wir, daß nach Taylor [17] I lokalisiert ist, d.h. I ist Verschwindungsideal einer diskreten Varietät mit Berücksichtigung von Vielfachheiten. Diese Varietät wird nun auf zwei verschiedene Weisen zu Nullstellenmengen von Funktionen in I ergänzt. Darüber, welche Folgen als Nullstellenmengen von Funktionen in A_p auftreten, informiert uns eine von Rubel und Taylor [16] gezeigte Verallgemeinerung eines Satzes von Lindelöf. Die Nullstellenmenge der ersten der beiden Funktionen, die das Ideal erzeugen, kann leicht angegeben werden. Bei der Wahl der Nullstellen der zweiten Funktion wird dann ein komplizierteres Rekursionsverfahren eingesetzt, dessen Grundgedanke sich am Beweis des Boutroux-Cartan-Lemmas orientiert. Daß die so gefundenen Funktionen das Ideal algebraisch erzeugen, zeigen wir mit dem semilokalen Interpolationssatz von Berenstein und Taylor [1], der seinerseits eine Anwendung der Hörmanderschen $\overline{\partial}$-Technik ist. Der (FN)-Fall wird mit einem Trick aus Meise und Taylor [9] auf den (DFN)-Fall zurückgeführt.
Die Aussage über die topologische Struktur abgeschlossener Ideale folgt daraus für den Fall, daß A_p isomorph zum Dualen eines Potenzreihenraums unendlichen Typs ist, mit einem Satz von Meise und Taylor [10] über die Komplementiertheit der abgeschlossenen Ideale in A_p, einem Satz von Meise [7] über die Struktur der Quotienten von A_p nach abgeschlossenen Idealen und durch Betrachtung der diametralen Dimension.
Falls A_p isomorph zum Dualen eines Potenzreihenraums von endlichem Typ ist, benutzen wir einen Satz von Vogt [21], der auf Untersuchungen von Mityagin und Henkin [14] zurückgeht. In diesem Satz werden die nuklearen Potenzreihenräume endlichen Typs mit Hilfe zweier linear topologischer Invarianten ($\underline{DN}$) und ($\overline{\Omega}$) charakterisiert. Aufgrund ihrer Vererbungseigenschaften ist klar, daß für ein endlich erzeugtes abgeschlossenes Ideal I der Dualraum I'_b diese Eigenschaften besitzt.

Falls A_p^0 isomorph zu einem Potenzreihenraum unendlichen Typs ist, verwenden wir ein Theorem von Vogt [22] über die Bilder linear zahmer Abbildungen zwischen Potenzreihenräumen unendlichen Typs. Dabei treten Bedingungen an den Isomorphismus auf, die in den uns bekannten konkreten Beispielen immer erfüllt sind.

Im Abschnitt über Algebren holomorpher Funktionen ohne Gewichtsbedingungen zeigen wir u. a. das folgende Ergebnis: Sei Ω eine stark pseudokonvexe zusammenhängende Steinsche Mannigfaltigkeit, sei $(z_j)_j$ eine Folge paarweise verschiedener Punkte in Ω, welche keinen Häufungspunkt besitzt. Für jedes j sei I_j ein endlich-codimensionales Ideal im lokalen Ring $\mathcal{O}_{z_j}$. Dann ist das Ideal

$$I = \{f \in H(\Omega) \mid [f]_{z_j} \in I_j \text{ für alle } j\}$$

linear homöomorph zu $H(\Omega)$.
Wir benutzen beim Beweis, daß $H(\Omega)$ erstens nach Zaharjuta [26] isomorph zu einem Potenzreihenraum endlichen Typs ist und zweitens eine lokal multiplikativ-konvexe Algebrenstruktur trägt, d.h. projektiver Limes von Banachalgebren ist.
Tatsächlich beweisen wir ein allgemeineres Resultat:
Ist E eine lokal multiplikativ-konvexe Algebra, welche isomorph zu einem nuklearen stabilen Potenzreihenraum $\Lambda_1(\alpha)$ von endlichem Typ ist, und ist $A: E \longrightarrow \prod B_j$ ein surjektiver Algebrenhomomorphismus von E auf ein Produkt endlich-dimensionaler kommutativer Banachalgebren mit 1, so gilt
Kern $A \simeq E$.
Falls A nur linear ist, ist der Satz nicht richtig, wie das folgende Resultat von Vogt [23] zeigt: Für jeden $\Lambda_1(\alpha)$ existiert eine lineare stetige Surjektion $A: \Lambda_1(\alpha) \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, deren Kern kein Potenzreihenraum ist.
Unser Beweis ist eine Fortentwicklung des Beweises der Proposition 6.5. aus Vogt [21]. Er besteht aus längeren Abschätzungen, die schließlich zum Nachweis der Eigenschaft $(\overline{\Omega})$ für Kern A führen. Da Kern A die Eigenschaft (DN) durch

Vererbung von $\Lambda_1(\alpha)$ besitzt, folgt die Behauptung mit dem auch für die Untersuchung der Algebren $A_p \simeq \Lambda_1(\alpha)'_b$ benutzten Satz von Vogt [21].

Mein Dank gilt Herrn Prof. Dr. B. A. Taylor für den Hinweis auf [16], Theorem 5.2., Herrn Prof. Dr. D. Vogt für die frühzeitige Überlassung seiner neuesten Preprints [22] und [23], vor allem aber Herrn Prof. Dr. R. Meise für seine Gesprächsbereitschaft bei der Betreuung der Arbeit, zahlreiche Anregungen zu weiteren Untersuchungen und seine kritischen Anmerkungen bei der Durchsicht der vorläufigen Fassung.

1. Potenzreihenräume und linear topologische Invarianten

Ein zentraler Begriff dieser Arbeit ist der des Potenzreihenraums. Viele der untersuchten Räume sind entweder selbst Potenzreihenräume oder aber Dualräume oder Quotienten von solchen. Die zu ihrer Untersuchung benötigten Begriffe und Sätze werden in diesem Kapitel bereitgestellt.

1.1 Definition:

a) $A=(a_{jk})$ sei eine $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ - Matrix von Zahlen aus $[0,\infty)$ mit den Eigenschaften:
   (i) Für jedes j gibt es ein k mit $a_{jk}>0$
   (ii) Für jedes j und jedes k gilt $a_{jk}\leq a_{j,k+1}$.
   Dann bezeichnet man den Raum

$$\lambda(A) = \{(x_j)_j \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| a_{jk} < \infty \text{ für alle } k\in\mathbb{N}\}$$

   als Kötheraum zur Köthematrix A.
   Seine Topologie wird durch das Halbnormensystem
   $\pi_k(x) = \sum |x_j| a_{jk}$, $k\in\mathbb{N}$, gegeben.

b) Eine Exponentenfolge ist eine monoton wachsende unbeschränkte Folge in $(0,\infty)$.

c) α sei eine Exponentenfolge, R=1 oder R=∞, $(\rho_k)_k$ eine beliebige streng monoton wachsende gegen R konvergente Folge.
   Für $a_{jk} = \rho_k^{\alpha_j}$ bezeichnet man $\lambda(A)$ als Potenzreihenraum und schreibt $\lambda(A) = \Lambda_R(\alpha)$.
   $\Lambda_\infty(\alpha)$ heißt Potenzreihenraum von unendlichem Typ, $\Lambda_1(\alpha)$ von endlichem Typ.
   Die Topologie wird durch die Normen der Gestalt

$$\pi_\rho(x) = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| \rho_j^{\alpha_j}, \quad \rho\in(0,R), \text{ gegeben.}$$

1.2 Beispiel:
Bekanntlich ist der Raum $H(\mathbb{C}^n)$ aller ganzen Funktionen in n Veränderlichen isomorph zu $\Lambda_\infty(j^{1/n})$, und der Raum $H(\mathbb{D}^n)$ aller holomorphen Funktionen auf dem n-fachen Produkt der Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$ ist isomorph zu $\Lambda_1(j^{1/n})$.
Weitere Beispiele werden in den Kapiteln 2 und 3 vorgestellt.

Um festzustellen, ob zwei Potenzreihenräume isomorph sind, bedient man sich oft des Begriffs der diametralen Dimension. Zwei Potenzreihenräume sind genau dann isomorph, wenn ihre diametralen Dimensionen gleich sind (s. [15],9.3.3. Thm. 1 und Thm. 2, oder [5],10.6.11).

1.3 Definition:
a) U und V seien absolutkonvexe Teilmengen eines lokalkonvexen Raumes E, und es existiere ein $C>0$ mit $U\subset CV$. Für $n\in\mathbb{N}_0$ bezeichnet
$$\delta_n(U,V) = \inf\{\lambda>0 \mid U\subset\lambda V + E_n,\ E_n \text{ linearer Unterraum von } E \text{ mit } \dim E_n = n\}$$
den n-ten Kolmogoroff-Durchmesser von U bzgl. V.
b) E sei ein lokalkonvexer Raum, $\mathcal{U}$ ein Fundamentalsystem absolutkonvexer Nullumgebungen in E. Dann heißt
$$\Delta(E) = \{(t_n)_n\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0} \mid \forall U\in\mathcal{U}\ \exists V\in\mathcal{U}: \lim t_n\delta_n(V,U) = 0\}$$
diametrale Dimension von E.

Bemerkung:
Die diametrale Dimension ist unabhängig von der speziellen Wahl der Nullumgebungsbasis. Sie ist invariant gegenüber Isomorphismen ([15],9.2.2. und 9.2.3. oder [5],10.6.1.).

1.4 Satz:
Ist E ein nuklearer Fréchet-Raum und F ein Unterraum oder ein Quotient von E, so gilt $\Delta(E)\subset\Delta(F)$.
Bew: Mityagin [13], Proposition 7

UNIV. LEIDEN BIBL.

Ein weiteres wesentliches Hilfsmittel bei der Untersuchung von Potenzreihenräumen sind die linear-topologischen Invarianten (DN), ($\underline{\text{DN}}$), (Ω) und ($\overline{\Omega}$).
(DN) und ($\underline{\text{DN}}$)wurden in Vogt [18] bzw. Vogt [20] zur Untersuchung der abgeschlossenen Unterräume von s bzw. von nuklearen stabilen Potenzreihenräumen endlichen Typs eingeführt. (Ω) und ($\overline{\Omega}$) dienen zur Betrachtung der Quotienten dieser Räume. Sie wurden in Vogt und Wagner [24] und Wagner [25] erstmalig vorgestellt.

1.5 Definition:
E sei ein Fréchet-Raum mit Halbnormensystem $(\|.\|_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
a) E hat die Eigenschaft (DN), wenn auf E eine stetige Norm $\|.\|$ existiert, so daß es zu jedem n ein m gibt, für das gilt: $\|.\|_n^2 \leq \|.\| \|.\|_m$.
b) E hat die Eigenschaft ($\underline{\text{DN}}$), wenn auf E eine stetige Norm $\|.\|$ existiert, so daß es zu jedem n ein m und ein $\lambda>0$ gibt, so daß gilt:
$$\|.\|_n^{1+\lambda} \leq \|.\|^{\lambda} \|.\|_m .$$

1.6 Definition:
E sei ein Fréchet-Raum.
a) E hat die Eigenschaft (Ω), wenn es zu jeder Nullumgebung U eine Nullumgebung V gibt, so daß zu jeder Nullumgebung W ein $C>0$ und ein $n>0$ existieren, so daß für alle $r>0$ gilt:
$$V \subset C r^n W + \frac{1}{r} U .$$
b) E hat die Eigenschaft ($\overline{\Omega}$), wenn es ein $n>0$ gibt, so daß zu jeder Nullumgebung U eine Nullumgebung V existiert, so daß für alle Nullumgebungen W ein $C>0$ existiert, für welches für alle $r>0$ gilt:
$$V \subset C r^n W + \frac{1}{r} U .$$

1.7 Bemerkung:

(1) (DN) und (DN) hängen nicht von der speziellen Wahl des Halbnormensystems ab.

(2) (DN) und (DN) vererben sich auf Unterräume, (Ω) und ($\overline{\Omega}$) vererben sich auf Quotienten. Alle vier Eigenschaften sind Invarianten unter linearen Homöomorphien.

1.8 Satz:

(1) Jeder Potenzreihenraum unendlichen Typs hat (DN) *und* (Ω), *nicht aber* ($\overline{\Omega}$).

(2) Jeder Potenzreihenraum endlichen Typs hat (DN) *und* ($\overline{\Omega}$), *nicht aber* (DN).

Bew: (1) Vogt [19], Lemma 5.6, und Wagner [25], Satz 20, Seite 25

(2) Wagner [25], Satz 9, Seite 19, und Satz 20, Seite 25

Es liegt nun die Frage nahe, ob man den Satz 1.8 auch umkehren und aus speziellen Eigenschaften des Halbnormensystems auf die Existenz einer (Schauder-)Basis schließen kann. Für Teil (2) des Satzes ist das möglich, falls der zu untersuchende Raum nuklear ist. Es gilt nämlich:

1.9 Theorem (Vogt [21], 2.2., Mityagin-Henkin [14], 1.1.):
Für einen nuklearen Fréchet-Raum E sind äquivalent:

(i) $E \simeq \Lambda_1(\alpha)$

(ii) E *hat* (DN), ($\overline{\Omega}$) *und* $\Delta(E) = \Lambda_1(\alpha)$

Die Frage, ob jeder nukleare Fréchet-Raum mit (DN) und (Ω) eine Basis besitzt, ist noch offen. Bei der Untersuchung solcher Räume verwendet Vogt den Begriff der linear zahmen Abbildung:

1.10 Definition:
Eine stetige lineare Abbildung $A:\Lambda_\infty(\alpha) \longrightarrow \Lambda_\infty(\beta)$ heißt linear zahm, falls eine Folge σ_k in $\mathbb{N}$ existiert mit
(i) Für alle k existiert ein $C>0$ mit $\pi_k \circ A \leq C\, \pi_{\sigma_k}$
(ii) Es gibt $a,b>0$ mit $\ln \sigma_k \leq a \ln k + b$ für alle k

1.11 Theorem (Vogt [22],7.2.):
$\Lambda_\infty(\alpha)$ und $\Lambda_\infty(\beta)$ seien nuklear, A: $\Lambda_\infty(\alpha) \longrightarrow \Lambda_\infty(\beta)$ sei linear zahm und Bild A *sei abgeschlossen.*
Dann ist Bild A *isomorph zu einem Potenzreihenraum von unendlichem Typ.*

Mit den Invarianten (DN) und (Ω) ist ferner der folgende Splittingsatz verbunden:

1.12 Theorem (Vogt und Wagner [24], Satz 1.4. und Vogt [18], Satz 1.3.):
E,F und G seien nukleare Fréchet-Räume, E habe (Ω), *G habe* (DN), *und die folgende Sequenz sei exakt:*

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow F \xrightarrow{P} G \longrightarrow 0 .$$

Dann spaltet die Sequenz, d. h. es existiert eine stetige lineare Abbildung $R: G \to F$ *mit* $P \circ R = id_G$.

Den Abschluß dieses vorbereitenden Kapitels bildet ein Mittag-Leffler-Lemma (s. Komatsu [6], Lemma 1.3.):

1.13 Lemma:

Für $n \in \mathbb{N}$ seien X_n, Y_n, Z_n normierte Räume. Es gebe ein kommutatives Diagramm stetiger linearer Abbildungen

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & Y_1 & \xrightarrow{q_1} & Z_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle p_{2,1}} & & \\
0 & \longrightarrow & X_2 & \longrightarrow & Y_2 & \xrightarrow{q_2} & Z_2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle p_{3,2}} & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
0 & \longrightarrow & X_n & \longrightarrow & Y_n & \xrightarrow{q_n} & Z_n & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle p_{n+1,n}} & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

($\hookrightarrow$ bezeichne eine Inklusionsabbildung).

Die Zeilen des Diagramms seien exakt. X_{n+1} sei dicht in X_n, und proj X_n sei vollständig. Dann ist die induzierte Sequenz

$$0 \longrightarrow \text{proj } X_n \longrightarrow \text{proj } Y_n \xrightarrow{q} \text{proj } Z_n \longrightarrow 0$$

exakt.

2. Ideale in lokal multiplikativ konvexen Algebren

2.1 Definition:

E sei ein lokalkonvexer $\mathbb{C}$-Vektorraum, der außerdem noch eine $\mathbb{C}$-Algebrenstruktur (nicht notwendig mit 1) besitzt.

a) Eine Halbnorm $\|.\|$ auf E heißt submultiplikativ, falls für alle $x,y \in E$ gilt: $\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\|$.

b) E heißt lokal multiplikativ konvexe Algebra, falls die Topologie auf E durch ein Fundamentalsystem submultiplikativer Halbnormen gegeben wird.

c) Eine lokal multiplikativ konvexe Algebra, die ein Fréchet-Raum ist, soll als F-Algebra bezeichnet werden.

d) Eine F-Algebra, deren Topologie durch eine einzige submultiplikative Norm gegeben wird, heißt Banach-Algebra, falls E eine 1 besitzt und für diese 1 gilt: $\|1\| = 1$.

2.2 Beispiele:

Beispiele für F-Algebren sind:

a) Die Räume $H(\Omega)$ aller holomorphen Funktionen auf offenen Mengen $\Omega \subset \mathbb{C}^n$.

b) Die Räume $C^k(U)$ aller k-mal stetig differenzierbaren komplexwertigen Funktionen auf offenen Mengen $U \subset \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ (siehe [12], 2.4.h).

Objekt unserer Untersuchungen sind solche abgeschlossenen Ideale I in F-Algebren, für die der Quotient E/I als F-Algebra isomorph zu einem Produkt von endlich-dimensionalen kommutativen Banach-Algebren (mit 1) ist. Die folgenden Überlegungen aus der kommutativen Algebra zeigen, daß man sich auf einen etwas spezielleren Fall beschränken kann:

2.3 Bemerkung:

E sei eine F-Algebra, für $i \in \mathbb{N}$ sei $\tilde{A}_i$ eine endlichdimensionale kommutative Banach-Algebra, und $\tilde{\Phi}_i : E \longrightarrow \tilde{A}_i$ sei ein stetiger Algebrenhomomorphismus. Ferner sei $\tilde{\Phi} : E \longrightarrow \prod_{i=1}^{\infty} \tilde{A}_i$ gegeben durch $\tilde{\Phi}(x) = (\tilde{\Phi}_i(x))_{i \in \mathbb{N}}$, $\tilde{\Phi}$ sei surjektiv, und es sei $I = \ker \tilde{\Phi}$.

$\tilde{A}_i$ ist speziell ein kommutativer Ring mit 1, der der absteigenden Kettenbedingung genügt. Mit [27], Ch. IV, §3, Thm. 3, folgt daraus, daß $\tilde{A}_i$ direkte Summe endlich vieler lokaler Ringe mit 1 ist. Diese seien vorerst mit $\tilde{A}_{il}$, $1 \leq l \leq n_i$, bezeichnet. Sei $m_0 = 0$, $m_i = \sum_{j=1}^{i} n_j$, so setzen wir für k mit $m_{i-1} < k \leq m_i$: $A_k = \tilde{A}_{i,k-m_{i-1}}$, $\Phi_k = pr_{i,k-m_{i-1}} \cdot \tilde{\Phi}_i$, wobei pr_{il} die Projektion von $\tilde{A}_i$ auf $\tilde{A}_{il}$ bezeichnet.

Dann gilt $\prod \tilde{A}_i = \prod A_k$, und die Abbildung $\Phi : E \longrightarrow \prod A_k$, $\Phi(x) = (\Phi_k(x))_k$ ist ein surjektiver Algebrenhomomorphismus mit $\ker \Phi = I$. Nach eventuellem Übergang zu einer äquivalenten Norm wird A_k zu einer Banach-Algebra ([28], Cor. 2.5.), die Norm wird einfach mit $|.|$ bezeichnet. Das einzige maximale Ideal in A_k heiße M_k.

Nach dem Satz von Gelfand und Mazur gilt $A_k / M_k \simeq \mathbb{C}$, die zugehörige Quotientenabbildung werde mit $\pi_k : A_k \longrightarrow A_k / M_k \simeq \mathbb{C}$ bezeichnet, und es sei $\Psi_k \in E'$ gegeben durch $\Psi_k = \pi_k \cdot \Phi_k$.

$(\|.\|_n)_n$ sei ein Fundamentalsystem submultiplikativer Halbnormen auf E. Schließlich sei

$E'_n = \{y \in E' \mid y \text{ stetig bzgl. } \|.\|_n\}$.

Für den Rest des Kapitels 2 seien diese Bezeichnungen verabredet.

2.4 Lemma:

B sei eine endlich-dimensionale kommutative Banach-Algebra mit genau einem maximalen Ideal M, $\pi: B \longrightarrow B/M \simeq \mathbb{C}$ sei die zugehörige Quotientenabbildung und $p = \dim B - 1$.
Dann gibt es für jedes $a \in B$ mit $\pi(a) = 1$ ein $C > 0$, so daß für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: $|a^k| \leq C k^p$.

Bew: $\pi(a) = 1$, also $a = 1+b$ für ein geeignetes $b \in M$. Wegen $b^{p+1} = 0$ (s. [27], Ch. IV, §3 bis, Lemma 3) folgt daraus:

$$a^k = (1+b)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} b^j = \sum_{j=0}^{\min(k,p)} \binom{k}{j} b^j \text{ , also } |a^k| \leq \sum_{j=0}^{p} k^p |b^j| .$$

2.5 Lemma:

Seien $k \in \mathbb{N}$, $\Psi_n \notin E_k'$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $y \in E$ mit $\|y\|_k < \varepsilon$, $\Phi_n(y) = 1$ und $\Phi_i(y) = 0$ für alle $i \neq n$.

Bew: Weil Φ surjektiv ist, existiert ein $g \in E$ mit $\Phi_i(g) = \delta_{in}$. Weil Ψ_n nicht stetig bzgl. $\|.\|_k$ ist, gibt es ein $x \in E$ mit $\|x\|_k < 1$ und $\Psi_n(x) = 1$, also $\Phi_n(x)$ invertierbar. Wendet man Lemma 2.4 auf die Inverse $f \in A_n$ zu $\Phi_n(x)$ an, so erhält man C und q mit $|f^j| \leq C j^q$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Φ_n ist lineare Abbildung von endlichem Rang, besitzt also eine bzgl. jeder Halbnorm auf E stetige Rechtsinverse. Es gibt daher $z_j \in E$ mit $\Phi_n(z_j) = f^j$ und $\|z_j\|_k \leq C' j^q$. Für alle j gilt $\Phi_i(z_j g x^j) = \delta_{in}$ und $\lim \|z_j g x^j\|_k \leq \lim C' j^q \|g\|_k \|x\|_k^j = 0$, da $\|x\|_k < 1$.

2.6 Lemma:

$\ker \Phi$ *ist dicht in* $(\bigcap \{\ker \Phi_i \mid \Psi_i \in E_1'\}, \|.\|_1)$.

Bew: Für $w \in \bigcap \{\ker \Phi_i \mid \Psi_i \in E_1'\}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig ist ein $x \in E$ gesucht mit $\Phi(x) = \Phi(w)$ und $\|x\|_1 < \varepsilon$, denn dann gilt $w - x \in \ker \Phi$ und $\|(w-x) - w\|_1 < \varepsilon$.

Dazu setzt man $I_1 = \{i \mid \Psi_i \in E_1'\}$, $I_{j+1} = \{i \mid \Psi_i \in E_{j+1}'\} \setminus I_j$. Man bestimmt zu $n \in I_k$, $k > 1$, mit 2.5 ein $z_n \in E$ mit $\Phi_n(z_n) = 1$, $\Phi_n(z_n) = 0$, $i \neq n$, und $\|z_n\|_{k-1} < \varepsilon (2^k |I_k| \|w\|_{k-1})^{-1}$. Man setzt $x_k = \sum_{n \in I_k} w z_n$, dann gilt $\|x_k\|_{k-1} < \varepsilon 2^{-k}$, folglich existiert $x = \sum_{k>1} x_k$ und leistet das Gewünschte.

2.7 Lemma:

E sei eine F-Algebra, $\|.\|_k$, $\|.\|_l$, $\|.\|_m$ *seien stetige submultiplikative Halbnormen auf* E *mit* $\|.\|_k \leq D\|.\|_m$, $D>0$ *geeignet, und für* $i\in\{k,l,m\}$ *sei* $U_i=\{x \mid \|x\|_i<1\}$. *I sei ein abgeschlossenes Ideal in* E, *für welches* E/I *als F-Algebra isomorph zu einem Produkt endlich-dimensionaler kommutativer Banach-Algebren (mit 1) ist.*

Es gebe $n,C>0$, *so daß für alle* $r>0$ *gilt:*

$$U_l \subset C\, r^n U_m + \frac{1}{r} U_k .$$

Es seien definiert $H=\{i \mid \Phi_i$ *stetig bzgl.* $\|.\|_k\}$,

$J=\{i \mid \Psi_i$ *unstetig bzgl.* $\|.\|_m\}$,

$K=\mathbb{N}\setminus(H\cup J)$.

Schließlich gebe es ein $c>0$ *und für alle* $i\in K$ *ein* $x_i\in E$ *mit*

$$\Psi_i(x_i)=1,\ \|x_i\|_k<1 \text{ und } \frac{\ln \|x_i\|_m}{-\ln \|x_i\|_k} \leq c.$$

Dann gilt mit $p=n+4(n+1)c$ *und geeignetem* $\tilde{C}>0$:

$$U_l \cap I \subset \tilde{C}\, r^p U_m \cap I + \frac{1}{r} U_k \cap I \quad \text{für alle } r>0.$$

Der Beweis des Lemmas ist eine Fortentwicklung des Beweises von Lemma 6.1. aus Vogt [21].

Bew: Es gelten die Bezeichnungen aus 2.3.

(i) Offenbar sind K und H endlich.

Wähle für $i\in K$ ein ξ_i mit $\ln \xi_i \in \mathbb{Q}\cap(\ln \|x_i\|_k, \frac{1}{2}\ln \|x_i\|_k)$ und wähle natürliche Zahlen $M_i \geq \frac{\ln 2}{\ln \|x_i\|_m}$ mit $\xi_i^{M_i} = \xi_j^{M_j} =: a$ für $i,j\in K$ beliebig. Nun wählt man noch ein $\lambda>1$ mit $\lambda^{M_i} \leq 2$ für alle $i\in K$.

(ii) Wegen der Surjektivität von Φ existiert für jedes $j\in\mathbb{N}$ ein g_j mit $\Phi_j(g_j)=1$ und $\Phi_i(g_j)=0$ für $i\neq j$. Wegen $\Psi_i(x_i)=1$ existiert zu $\Phi_i(x_i)$ ein Inverses f_i, auf das Lemma 2.4 angewandt werden kann, d. h. es gibt D_1 und d, so daß für alle $j\in\mathbb{N}$ und alle $i\in K$ gilt: $|f_i^j| \leq D_1 j^d$. Also gibt es Urbilder $y_i^{(j)}\in E$ von f_i^j mit $\|y_i^{(j)}\|_k \leq D_2 j^d$ und $\|y_i^{(j)}\|_m \leq D_3 j^d$ für geeignete D_2, D_3.

Setzt man $z_i^{(j)} = y_i^{(j)} x_i^j g_i$, so gelten:

$$\Phi_i(z_i^{(j)}) = 1,\ \Phi_\nu(z_i^{(j)}) = 0 \text{ für } \nu \neq i,$$
$$\| z_i^{(j)} \|_m \leq D_4(\lambda \| x_i \|_m)^j,$$
$$\| z_i^{(j)} \|_k \leq D_5 \xi_i^j.$$

Es sei $\mu \in K$ der Index, für welchen gilt:

$$\| x_\mu \|_m^{M_\mu} = \max\{ \| x_i \|_m^{M_i} \mid i \in K\} =: b.$$

Für $z^{(j)} = \sum_{i \in K} z_i^{(jM_i)}$ gelten dann folgende Beziehungen:

$$\Phi_i(z^{(j)}) = 1 \text{ für alle } i \in K,$$
$$\| z^{(j)} \|_m \leq D_6(2b)^j,$$
$$\| z^{(j)} \|_k \leq D_7 a^j.$$

(iii) Laut Voraussetzung gilt $U_l \subset C\, r^n U_m + \frac{1}{r} U_k$ für alle r. Es sei nun ein festes $N \in \mathbb{N}$ gewählt:

Setze $r = a^{-N/(n+1)}$. Zu diesem r existieren für $x \in U_l$ ein $w \in U_m$ und ein $u \in U_k$ mit $x = C\, r^n w + \frac{1}{r} u$. x wird nun wie folgt zerlegt:

$$x = Cr^n(w - wz^{(N)}) + \frac{1}{r}(u + Cr^{n+1} wz^{(N)}).$$

Der erste Summand liegt in $\bigcap_{i \in K} \ker \Phi_i$. Mit

$$s = 2ba^{-n/(n+1)} \text{ und } t = a^{-1/(n+1)}$$

gelten folgende Abschätzungen:

$$\| r^n wz^{(N)} \|_m \leq r^n D_6(2b)^N = D_6 s^N,$$
$$\| r^{n+1} wz^{(N)} \|_k \leq r^{n+1} D_7 a^N = D_7.$$

Damit ist gezeigt: Es gibt $C_1 > 0$, so daß für alle $N \in \mathbb{N}$

$$U_l \cap I \subset C_1(s^N U_m \cap \bigcap_{i \in K} \ker \Phi_i + \frac{1}{t^N} U_k \cap \bigcap_{i \in K} \ker \Phi_i).$$

(iv) Die Abbildung $(\Phi_j)_{j \in H}: \bigcap_{i \in K} \ker \Phi_i \longrightarrow \prod_{j \in H} A_j$ ist surjektiv und hat eine, wegen der Endlichkeit von H, in allen Halbnormen stetige Rechtsinverse S. Die Abbildung

$$P = S\cdot(\Phi_j)_{j\in H}: \bigcap_{i\in K} \ker \Phi_i \longrightarrow \bigcap_{i\in K} \ker \Phi_i$$

ist eine Projektion mit $\ker P = \bigcap_{i\in H\cup K} \ker \Phi_i$.

Nach Wahl von H ist Φ_i für $i\in H$ stetig bzgl. $\|.\|_k$ und wegen $\|.\|_k \leq D\|.\|_m$ auch bzgl. $\|.\|_m$, dasselbe gilt für P und $Q := id - P$. Wendet man Q auf das Ergebnis von (ii) an, so erhält man für ein geeignetes $C_2>0$:

$$U_1\cap I = Q(U_1\cap I) \subset C_2(s^N U_m \cap \bigcap_{i\in H\cup K} \ker \Phi_i + \frac{1}{t^N} U_k \cap \bigcap_{i\in H\cup K} \ker \Phi_i).$$

(v) Nach Lemma 2.6 ist $I = \ker \Phi$ dicht in $(\bigcap_{i\in H\cup K} \ker\cdot \Phi_i, \|.\|_m)$. Für $\varepsilon=(st)^{-N}$ gilt also: $U_m \cap \bigcap_{i\in H\cup K} \ker \Phi_i \subset U_m \cap \ker \Phi + \varepsilon U_m$. Daraus folgt mit (iv):

$$U_1\cap I \subset C_2(s^N U_m\cap I + \varepsilon s^N U_m + \frac{1}{t^N} U_k)$$

$$\subset C_2(s^N U_m\cap I + \frac{2}{t^N} U_k).$$

(vi) Zu $r\geq t$ wählt man N mit $t^N \leq r < t^{N+1}$. Mit $q = \frac{\ln s}{\ln t}$ gilt dann $r^q \geq s^N$, also folgt

$$U_1\cap I \subset C_2(s^{N+1} U_m\cap I + \frac{2}{t^{N+1}} U_k\cap I)$$

$$\subset C_2(s r^q U_m\cap I + \frac{2}{r} U_k\cap I) \quad \text{für } r\geq t.$$

Mit den üblichen Methoden, also Vergrößerung der Konstanten und Substitution, erhält man

$$U_1\cap I \subset \tilde{C}\, r^q\, U_m\cap I + \frac{1}{r} U_k\cap I \quad \text{für alle } r>0.$$

Es fehlt also nur noch eine Abschätzung für q:

$$q = \frac{\ln s}{\ln t} = -\frac{\ln 2b - \frac{n}{n+1}\ln a}{\frac{\ln a}{n+1}} = n + (n+1)\frac{\ln(2\|x_\mu\|_m^{M_\mu})}{-\ln(\xi_\mu^{M_\mu})} \overset{(i)}{\leq}$$

$$n - (n+1)\frac{2M_\mu \ln\|x_\mu\|_m}{\frac{1}{2}M_\mu \ln\|x_\mu\|_k} \leq n + 4(n+1)c = p.$$

Bei allgemeinen Fundamentalsystemen submultiplikativer Halbnormen kann die Menge K Indices i enthalten, für die $\Psi_i \in E'_k$ gilt. In diesem Fall ist nicht klar, daß es x_i gibt mit $\Psi_i(x_i) = 1$ und $\|x_i\|_k < 1$. Das folgende Lemma zeigt, daß diese Situation durch Wahl eines geeigneten Halbnormensystems vermieden werden kann.

2.8 Lemma:

Sei $\|.\|_1 \leq \|.\|_2 \leq \ldots$ *ein Fundamentalsystem submultiplikativer Halbnormen auf* E, *und seien* $I_1 \subset I_2 \subset \ldots$ *endliche Mengen von Indices mit* $I_j \supset \{i \mid \Psi_i$ *stetig bzgl.* $\|.\|_j\}$. *Dann gibt es ein Fundamentalsystem* $|.|_1 \leq |.|_2 \leq \ldots$ *submultiplikativer Halbnormen auf* E, *so daß für* $i,j \in \mathbb{N}$ *gleichwertig sind:*

(1) Ψ_i *ist stetig bzgl.* $|.|_j$

(2) Φ_i *ist stetig bzgl.* $|.|_j$

(3) $i \in I_j$

und für das $\|.\|_j$ *auf* $\bigcap_{i \in I_j} \ker \Phi_i$ *mit* $|.|_j$ *übereinstimmt.*

Bew: Setze $|x|_j = \max(\{\|x\|_j\} \cup \{|\Phi_i(x)| \mid i \in I_j\})$, dann ist der letzte Teil der Behauptung bereits klar.

(1)=>(3): Gilt $i \notin I_j$, so existieren nach 2.5 Elemente $y_n \in E$ mit $\Phi_i(y_n) = 1$, $\Phi_m(y_n) = 0$ für $m \neq i$ und $\lim_{n\to\infty} \|y_n\|_j = 0$. Wegen $\Phi_m(y_i) = 0$ für $m \in I_j$ gilt $|y_n|_j = \|y_n\|_j$.

(3)=>(2) und (2)=>(1) sind klar.

2.9 Theorem:

I sei ein abgeschlossenes Ideal in einer F-Algebra E, *für welches der Quotient* E/I *als F-Algebra isomorph zu einem Produkt* $\prod A_i$ *endlich-dimensionaler kommutativer Banach-Algebren (mit 1) ist.*

Hat E *die Eigenschaft* (Ω), *so auch* I.

Bew: Man definiere $I_j=\{i|\Psi_i$ stetig bzgl. $\|.\|_j\}$ und versehe E mit dem gemäß 2.8 zugehörigen Halbnormensystem $(|.|_j)_j$, setzt also $U_j=\{x||x|_j<1\}$.
Seien $k<l<m$ gegeben mit $U_l\subset Cr^nU_m+\frac{1}{r}U_k$ für alle $r>0$. Setze $K=I_m\setminus I_k$ wie in 2.7. Für $i\in K$ ist dann Ψ_i nicht stetig bzgl. $|.|_k$, es gibt also ein $x_i\in E$ mit $|x_i|_k<1$ und $\Psi_i(x_i)=1$.
Da K endlich ist, existiert $c=\max\{\frac{\ln|x_i|_m}{-\ln|x_i|_k}|i\in K\}$,
folglich läßt sich Lemma 2.7 anwenden und liefert sofort die Behauptung.

2.10 Theorem:
Die F-Algebra E *sei Quotient eines Potenzreihenraums* $\Lambda_1(\alpha)$. *I⊂E sei ein abgeschlossenes Ideal, für welches die Quotientenalgebra* E/I *isomorph zu einem Produkt kommutativer Banach-Algebren (mit 1) ist.*
Dann hat I *die Eigenschaft* $(\overline{\Omega})$.
Bew: Unter den angegebenen Voraussetzungen sind die Banach-Algebren Schwartzräume, also endlich-dimensional.
Wird mit $q:\Lambda_1(\alpha)\longrightarrow E$ die Quotientenabbildung bezeichnet, so existiert zu jedem $k\in\mathbb{N}$ die Zahl
(1) $\rho_k=\inf\{\rho<1|\exists C>0\ \forall y\in\Lambda_1(\alpha):\ \|q(y)\|_k\leq C\pi_\rho(y)\}$,
und zu jedem $j\in\mathbb{N}$ existiert
$r_j=\inf\{r<1|\Psi_j\circ q$ stetig bzgl. $\pi_r\}$.
Es sei $I_k=\{j\in\mathbb{N}|r_j<\rho_k^{1/4}\}$, mit $|.|_k$ sollen wieder die gemäß 2.8 gebildeten Halbnormen bezeichnet werden, und es seien $U_k=\{x||x|_k<1\}$, $V_m=\{x|\|x\|_m<1\}$.
Es seien $k,l,m\in\mathbb{N}$, $n,C,D>0$ gegeben mit $|.|_k\leq D\|.\|_m$ und
$U_l\subset Cr^nV_m+\frac{1}{r}U_k$ für alle $r>0$.
Für K wie in 2.7 gilt dann nach Wahl von $|.|_k$:
$K=\{i|\Psi_i$ stetig bzgl. $\|.\|_m$, $i\notin I_k\}$.
Zur Abkürzung setzen wir
(2) $\rho=\rho_k$, $\lambda=\rho^{-1/4}$.
Sei nun $j\in K$ beliebig, dann existiert nach Wahl von r_j eine Teilfolge (e_{N_i}) der Standardbasis von $\Lambda_1(\alpha)$, so daß

$$|\Psi_j \cdot q(e_{N_i})| \geq \left(\frac{r_j}{\lambda}\right)^{\alpha_{N_i}} \quad \text{für alle } i,$$

ferner existiert wegen der Surjektivität von Φ ein $g \in E$ mit $\Phi_j(g) = 1$ und $\Phi_i(g) = 0$ für $i \neq j$. Setzt man nun

$$\xi_{N_i} = (\Psi_j \cdot q(e_{N_i}))^{-1} q(e_{N_i})\, g,$$

so gelten $\Psi_j(\xi_{N_i}) = 1$ und

$$(3) \qquad |\xi_{N_i}|_k = \|\xi_{N_i}\|_k \leq \|g\|_k \left(\frac{\lambda}{r_j}\right)^{\alpha_{N_i}} \|q(e_{N_i})\|_k \xrightarrow{i\to\infty} 0,$$

da $\frac{r_j}{\lambda} \geq \sqrt{\rho} > \rho$ nach Wahl von I_k und λ und da für $\sigma > \rho$ wegen (1) und (2) gilt $\lim_{N\to\infty} \frac{\|q(e_N)\|_k}{\sigma^{\alpha_N}} = 0$.

Weiter gilt

$$(4) \qquad \|\xi_{N_i}\|_m \leq \|g\|_m \left(\frac{\lambda}{r_j}\right)^{\alpha_{N_i}} \|q(e_{N_i})\|_m \leq C_1 \rho^{-\frac{1}{2}\alpha_{N_i}}.$$

Wegen (1) gilt $\|q(e_{N_i})\|_k \leq C_2 \rho^{3/4\alpha_{N_i}}$ für geeignetes $C_2 > 0$, daraus folgt mit (3) und (4):

$$\lim_{i\to\infty} - \frac{\ln\|\xi_{N_i}\|_m}{\ln|\xi_{N_i}|_k} \leq \lim_{i\to\infty} \frac{\ln C_1 - \frac{1}{2}\alpha_{N_i} \ln \rho}{-\ln\|g\|_k + \frac{1}{2}\alpha_{N_i} \ln \rho - \ln C_2 - \frac{3}{4}\alpha_{N_i} \ln \rho} = 2.$$

Damit sind die Voraussetzungen von 2.7 mit $c=3$ erfüllt, wenn man für x_j ein ξ_{N_i} mit hinreichend großem Index i wählt.

2.11 Korollar:

Falls unter den Voraussetzungen von 2.10 der Potenzreihenraum $\Lambda_1(\alpha)$ auch noch nuklear ist, so ist I (als topologischer Vektorraum) isomorph zu einem Quotienten von $\Lambda_1(\alpha)$.

Bew: I ist Unterraum eines Quotienten von $\Lambda_1(\alpha)$, also $\Lambda_1(\alpha)$-nuklear (s. [21],2.4.). Da nach 2.10 I die Eigenschaft $(\overline{\Omega})$ hat, folgt aus [21], Satz 2.8. die Behauptung.

2.12 Korollar:

Die F-Algebra E *sei isomorph zu einem nuklearen Potenzreihenraum* $\Lambda_1(\alpha)$ *mit* $\lim \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1$. $I \subset E$ *sei ein abgeschlossenes Ideal, für welches die Quotientenalgebra* E/I *isomorph zu einem Produkt* $\prod A_i$ *von kommutativen Banach-Algebren (mit 1) ist. Dann sind* I *und* E *als topologische Vektorräume isomorph.*

Bew: Nach 1.7 und 1.8 besitzt I die Eigenschaft (DN) und nach 2.10 die Eigenschaft $(\overline{\Omega})$. Wegen Vogt [22],Prop. 2.5., gilt $\Delta(E) = \Delta(I)$. Hieraus folgt mit 1.9 die Behauptung.

2.13 Bemerkung:

Die Untersuchungen dieses Kapitels gehen zurück auf einen Satz aus Vogt [21]. Dort werden lineare Surjektionen $A: \Lambda_1(\alpha) \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ der Gestalt $Ax=(\sum A_{ni}x_i)_n$ mit

$$(*) \qquad c_n r_n^{\alpha_i} \leq |A_{ni}| \leq C_n r_n^{\alpha_i}$$

betrachtet. Vogt zeigt (Prop. 6.5.), daß $\ker A \simeq \Lambda_1(\alpha)$ gilt, falls die α_n die Voraussetzungen von 2.12 erfüllen und die Folge der r_n streng monoton wächst. In Vogt [23] wird andererseits gezeigt, daß es zu jedem $\Lambda_1(\alpha)$ eine Surjektion $A: \Lambda_1(\alpha) \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ wie oben gibt, bei der alle Werte r_n genau zweimal angenommen werden und deren Kern die Eigenschaft $(\overline{\Omega})$ nicht besitzt.

Die Größen r_n entsprechen den r_n aus dem Beweis von 2.10, auch wenn (*) in dieser strengen Form nicht mehr zu gelten braucht. Man sieht, daß, falls $\Lambda_1(\alpha)$ eine F-Algebrenstruktur besitzt und A diese respektiert, keine Bedingung mehr an die Vielfachheit der r_n gestellt zu werden braucht außer der von der Surjektivität herkommenden Forderung $\lim r_n = 1$.

Der Isomorphiesatz 2.12 soll nun auf Räume holomorpher Funktionen angewandt werden:

2.14 Definition:
Eine Steinsche Mannigfaltigkeit Ω heißt stark pseudokonvex, falls eine plurisubharmonische Funktion $p: \Omega \longrightarrow [-\infty, 0)$ existiert, für die für alle $a>0$ das Urbild $p^{-1}([-\infty,-a])$ relativ kompakt in Ω ist.

2.15 Theorem (Zaharjuta [26], Thm. 1):
Ω sei eine zusammenhängende Steinsche Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension N, und sei $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|<1\}$.
$H(\Omega)$ und $H(\mathbb{D}^N)$ sind genau dann als topologische Vektorräume isomorph, wenn Ω stark pseudokonvex ist.

2.16 Theorem:
Sei Ω eine stark pseudokonvexe zusammenhängende Steinsche Mannigfaltigkeit, sei $(z_j)_j$ eine Folge paarweise verschiedener Punkte in Ω, welche keinen Häufungspunkt besitzt. Für jedes j sei I_j ein endlich-codimensionales Ideal im lokalen Ring O_{z_j}.
Dann ist das Ideal $I = \{f \in H(\Omega) \mid [f]_{z_j} \in I_j$ für alle $j\}$ als topologischer Vektorraum isomorph zu $H(\Omega)$.
Bew: Nach [4], Thm. 6.3.5., ist I_j abgeschlossen in O_{z_j} versehen mit der Topologie der einfachen Konvergenz, daher ist I ein abgeschlossenes Ideal in $H(\Omega)$.
Um 2.12 anwenden zu können, muß also nur die Surjektivität von

$$\Phi: H(\Omega) \longrightarrow \prod_{j=1}^{\infty} O_{z_j}/I_j$$
$$f \longmapsto ([f]_{z_j} + I_j)_j$$

gezeigt werden. Sei dazu $K_1 \subset \dot{K}_2 \subset K_2 \subset \dot{K}_3 \subset \ldots$ eine kompakte Ausschöpfung von Ω derart, daß alle K_j mit ihren holomorph-konvexen Hüllen übereinstimmen.

Setze $N_j = \{i | z_i \in K_j\}$.
Zum Beweis der Surjektivität wird das Mittag-Leffler-Lemma 1.13 herangezogen. Dabei ist
$Y_m = (H(\Omega), \|.\|_{K_m})$, $Z_m = \prod_{j\in N_m} \mathcal{O}_{z_j}/I_j$,

$\Phi_m: Y_m \longrightarrow Z_m$, $\Phi_m(f) = ([f]_{z_j} + I_j)_{j\in N_m}$, $X_m = \ker \Phi_m$.

Wir zeigen zunächst die folgende Zwischenbehauptung:
Sei $z\in\Omega$, I ein endlich-codimensionales Ideal in $\mathcal{O}_z$. Dann gibt es zu jedem $b\in\mathcal{O}_z$ ein $p\in H(\Omega)$ mit $b + I = [p]_z + I$.
Bew: Nach Definition der Steinschen Mannigfaltigkeit gibt es $G=(g_1,\ldots,g_N)\in H(\Omega,\mathbb{C}^N)$ mit $G(z)=0$ und eine offene Umgebung U von z, so daß $G|U: U \longrightarrow \mathbb{C}^N$ eine Karte bildet. Sei $J = \{[f\cdot G^{-1}]_0 | [f]_z \in I\}$. Dann ist

$$F: \mathcal{O}_0/J \longrightarrow \mathcal{O}_z/I,\ a + J \longmapsto a\cdot G + I,$$

ein Ringisomorphismus. In $H(\mathbb{C}^N)$ bilden die Polynome einen dichten Unterraum, $\mathcal{O}_0/J$ ist endlich-dimensional, folglich gibt es zu $F^{-1}(b) + J \in \mathcal{O}_0/J$ ein Polynom q mit $F^{-1}(b) + J = q + J$. Man setzt $p = q\cdot G \in H(\Omega)$.
Sei nun für $j\in N_m$ $g_j\in\mathcal{O}_{z_j}$ beliebig. Dann gibt es ein $h_j\in H(\Omega)$ mit $h_j(z_\nu) = \delta_{\nu j}$ für $\nu\in N_m$, d. h. $[h_j]_{z_\nu}$ ist eine Einheit für $\nu=j$ und nilpotent für $\nu\neq j$ ([27], Ch IV, §3bis, Lemma 3). Für ein geeignetes $k_j\in\mathbb{N}$ gilt daher

$$[h_j^{k_j}]_{z_\nu} \in I_\nu \text{ für } \nu\neq j.$$

Wie wir oben gesehen haben, gibt es globale Funktionen $p_j\in H(\Omega)$ mit $[p_j]_{z_j} + I_j = g_j [h_j]_{z_j}^{-k_j} + I_j$.
Es gilt $\Phi_m\left(\sum_{j\in N_m} p_j h_j^{k_j}\right) = (g_j + I_j)_{j\in N_m}$.
Nun muß noch nachgewiesen werden, daß X_{m+1} dicht in $(X_m, \|.\|_{K_m})$ ist:
Sei $f\in X_m$ beliebig gewählt, und sei $j\in N_{m+1}\setminus N_m$. Da K_m gleich seiner holomorph konvexen Hülle ist, existiert ein $a_j\in H(\Omega)$ mit:

(1) $\|a_j\|_{K_m} < \frac{1}{2}$ und $a_j(z_j) = 1$.

Nach Lemma 2.4 existieren $p, C_1 > 0$ mit $|[a_j]_{z_j}^{-k} + I_j| \leq C_1 k^p$.
Weil $\prod_{j\in\mathbb{N}_{m+1}} \mathcal{O}_{z_j}/I_j$ endlich-dimensional ist, hat Φ_{m+1} eine Rechtsinverse R. Sei $b \in \prod_{\nu\in\mathbb{N}_{m+1}} \mathcal{O}_{z_\nu}/I_\nu$ bestimmt durch $b_j = [a_j]^{-1} + I_j$, $b_\nu = 0$ für $\nu \neq j$, und sei $p_{kj} = R(b^k)$, dann gelten:

(2)
$$[a_j^k p_{kj}]_{z_j} + I_j = 1 + I_j, \quad [p_{kj}]_{z_\nu} \in I_\nu \text{ für } \nu \neq j, \ \nu\in\mathbb{N}_{m+1},$$
$$\|p_{kj}\|_{K_m} \leq C_2 k^p \text{ für geeignetes } C_2.$$

Setzt man $g_k = \sum_{j\in\mathbb{N}_{m+1}\setminus\mathbb{N}_m} a_j^k p_{kj}$, so gilt wegen (1) und (2):

$$\lim \|g_k\|_{K_m} = 0 \text{ und } [g_k]_{z_j} = 1 \text{ für alle } j\in\mathbb{N}_{m+1}\setminus\mathbb{N}_m.$$

Also $(1-g_k)f \in X_{m+1}$ und $\|f - (1-g_k)f\|_{K_m} \xrightarrow{k\to\infty} 0$.

Korollar 2.12 soll nun angewandt werden, um Aussagen über Verschwindungsideale diskreter Varietäten in Räumen holomorpher Funktionen auf gewissen offenen Polyzylindern in Dualräumen von Potenzreihenräumen endlichen Typs zu erhalten. Die notwendigen Definitionen und Bezeichnungen werden hier kurz vorgestellt, Details findet man z. B. bei Dineen [3].

2.17 Definition:
$\Omega \neq \emptyset$ sei eine offene Teilmenge eines lokalkonvexen Raumes E. Eine stetige Funktion $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt holomorph, wenn für alle $a,b\in E$ die Funktion $z \mapsto f(az + b)$ eine holomorphe Funktion einer Veränderlichen auf der Menge $\{z\in\mathbb{C} \mid za + b \in \Omega\}$ ist.
Der Raum aller holomorphen Funktionen $\Omega \to \mathbb{C}$ wird mit $H(\Omega)$ bezeichnet. Er sei mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den kompakten Teilmengen von Ω versehen.

2.18 Bemerkung:
(1) $\Lambda(P)$ sei ein nuklearer Kötheraum, und es sei $a \in \Lambda(P)$ mit $a \geq 0$. Dann ist

$$\mathbb{D}_a = \{x \in \Lambda(P)' \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| a_n < 1\}$$

eine offene Teilmenge von $\Lambda(P)'_b$, die man als offenen Polyzylinder bezeichnet.
(2) Meise und Vogt haben in [11], 2.3. und 3.3., gezeigt: Ist $\Lambda_1(\alpha)$ nuklear, so ist für $\mathbb{1} := (1)_{n \in \mathbb{N}} \in \Lambda_1(\alpha)$ der Raum $H(\mathbb{D}_{\mathbb{1}})$ isomorph zu einem nuklearen stabilen Potenzreihenraum endlichen Typs. Falls für $a \in \Lambda_{\mathbb{1}}(\alpha)$, $a > 0$, $H(\mathbb{D}_a)$ ebenfalls isomorph zu einem Potenzreihenraum ist, so sind $\mathbb{D}_a$ und $\mathbb{D}_{\mathbb{1}}$ bereits biholomorph äquivalent. Wir beschränken uns daher im folgenden auf die Untersuchung von $H(\mathbb{D}_{\mathbb{1}})$.
(3) Für $z \in \mathbb{D}_{\mathbb{1}}$ ist der lokale Ring $\mathcal{O}_z$ algebraisch erklärt als induktiver Limes ind $H(U)$ über alle offenen Umgebungen U von z. Wir benötigen keine Topologie auf $\mathcal{O}_z$.

2.19 Theorem:
Sei $(z_j)_j$ eine Folge paarweise verschiedener Punkte in $\mathbb{D}_{\mathbb{1}}$, welche dort keinen Häufungspunkt besitzt. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei I_k ein endlich-codimensionales Ideal in $\mathcal{O}_{z_k}$. Ferner sei für jedes k

$$J_k = \{f \in H(\mathbb{D}_{\mathbb{1}}) \mid [f]_{z_k} \in I_k\}$$

abgeschlossen in $H(\mathbb{D}_{\mathbb{1}})$.
Dann ist das Ideal $I = \bigcap J_k$ linear homöomorph zu $H(\mathbb{D}_{\mathbb{1}})$.
Bew: Aus den Voraussetzungen ergibt sich sofort, daß I ein abgeschlossenes Ideal in $H(\mathbb{D}_{\mathbb{1}})$ ist.
Der Beweis ist analog zu dem von 2.16, wir müssen allerdings noch den Nachweis der Existenz globaler Repräsentanten für die Elemente von $\mathcal{O}_{z_j}/I_j$ sowie die Definition einer Topologie auf $\mathcal{O}_{z_j}/I_j$ nachtragen:

Sei $M_j = \{f \in \mathcal{O}_{z_j} \mid f(z_j)=0\}$ das maximale Ideal in $\mathcal{O}_{z_j}$. Weil die Dimension von $\mathcal{O}_{z_j}/I_j$ endlich ist, gibt es ein p mit $M_j^p \subset I_j$, folglich existiert eine Surjektion $\mathcal{O}_{z_j}/M_j^p \longrightarrow \mathcal{O}_{z_j}/I_j$. $\mathcal{O}_{z_j}/M_j^p$ wird von Polynomen vom Grade höchstens p-1 erzeugt.
Aus der Existenz globaler Repräsentanten folgt auch die Isomorphie $\mathcal{O}_{z_k}/I_k \simeq H(\mathbb{D}_1)/J_k$. Mit ihr wird die Topologie auf $\mathcal{O}_{z_k}/J_k$ erklärt.

2.20 Korollar:
Sei $(z_j)_j$ eine Folge ohne Häufungspunkte in $\mathbb{D}_1$. Dann ist das Ideal $I = \{f \mid f(z_j)=0$ *für alle* $j\}$ *linear homöomorph zu* $H(\mathbb{D}_1)$.

2.21 Bemerkung:
Im Gegensatz zum Fall endlich vieler Veränderlicher ist hier die Forderung nach der Abgeschlossenheit von J_k nicht entbehrlich. Es gibt nämlich 2-codimensionale lokalisierte nicht abgeschlossene Ideale in $H(\mathbb{D}_1)$.
Zum Beweis sei $B \subset (\Lambda_1(\alpha)'_b)'_b = \Lambda_1(\alpha)$ ein nicht abgeschlossener 1-codimensionaler linearer Unterraum . Für $f \in \mathcal{O}_0$ bezeichne $\pi_1(f)$ den linearen Anteil der Taylorentwicklung im Ursprung. Setzt man

$$I = \{f \in \mathcal{O}_0 \mid f(0)=0,\ \pi_1(f) \in B\},$$

so ist $J = \{f \in H(\mathbb{D}_1) \mid [f]_0 \in I\}$ nicht abgeschlossen, denn $J \cap (\Lambda_1(\alpha)'_b)' = B$ und $(\Lambda_1(\alpha)'_b)'_b$ ist topologischer linearer Unterraum von $H(\mathbb{D}_1)$.

3. Algebren ganzer Funktionen einer komplexen Veränderlichen mit Wachstumsbedingungen

A Definitionen und allgemeine Sätze

Es wird zunächst dargelegt, welche Räume betrachtet werden sollen, und einige grundlegende Sätze, auf die später zurückgegriffen wird, werden zusammengestellt.

3.1 Definition:
Eine Funktion $p: \mathbb{C} \longrightarrow [0,\infty)$ heißt Gewichtsfunktion, falls folgendes gilt:
(1) p ist stetig, subharmonisch und hängt nur von $|z|$ ab
(2) $\ln(1+|z|^2) = o(p(z))$
(3) $p(2z) = O(p(z))$

Dieser Begriff einer Gewichtsfunktion ist enger als der von Berenstein und Taylor [1] vorgestellte. Insbesondere die Bedingung (3) ist stärker formuliert als üblich. Auch sind für viele Zwecke nicht-radiale Gewichtsfunktionen von Interesse. In diesen Fällen steht aber z. B. das Theorem 3.18 von Rubel und Taylor nicht zur Verfügung.

3.2 Definition:
p sei eine Gewichtsfunktion. Es sei
(1) $A_p := \{f \in H(\mathbb{C}) \mid \text{es gibt } A>0: \sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)|e^{-Ap(z)} < \infty\}$,
versehen mit der Topologie des induktiven Limes.
(2) $A_p^0 := \{f \in H(\mathbb{C}) \mid \text{für alle } \varepsilon>0: \sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)|e^{-\varepsilon p(z)} < \infty\}$,
versehen mit der Topologie des projektiven Limes,
d. h. mit den Normen $\|f\|_k := \sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)|e^{-(1/k)p(z)}$.

3.3 Definition:
Sei ϕ: $[0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine wachsende konvexe Funktion, dann wird ihre Young-Konjugierte ϕ^*: $[0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ definiert durch

$$\phi^*(y) = \sup_{x \geq 0} xy - \phi(x) \quad .$$

3.4 Satz:
Sei p eine Gewichtsfunktion, $\phi(x) = p(e^x)$. Für

$$B = (\exp(-k\,\phi^*(\tfrac{j}{k})))_{j\in\mathbb{N}_0, k\in\mathbb{N}} \quad \textit{ist die Abbildung}$$

$$T: A_p \longrightarrow (\lambda(\mathbb{N}_0, B))'_b$$

$$f \longmapsto (\frac{f^{(j)}(0)}{j!})_{j\in\mathbb{N}_0}$$

ein Isomorphismus.
Bew: [10], Prop. 3.2.

3.5 Definition:
Die Gewichtsfunktion p heißt (DN)-Gewichtsfunktion, falls für jedes $C>1$ ein $R_0>0$ und $0<\delta<1$ existieren, so daß für alle $R \geq R_0$ gilt:

$$p^{-1}(CR)\; p^{-1}(\delta R) \leq (p^{-1}(R))^2 \quad .$$

3.6 Theorem (Meise und Taylor [10], 3.4.):
Es sind gleichwertig:
(1) p ist eine (DN)-Gewichtsfunktion
(2) A_p ist isomorph zu einem $\Lambda_\infty(\alpha)'_b$
(3) Jedes abgeschlossene Ideal in A_p ist komplementiert

Meise und Taylor behandeln einen wesentlich weniger restriktiven Gewichtsbegriff als wir. So beschränken sie sich nicht auf den eindimensionalen Fall und lassen auch nicht-radiale Gewichtsfunktionen zu. In [10], Theorem 2.17., charakterisieren sie diejenigen Gewichtsfunktionen p, für die $A_p(\mathbb{C}^n)'_b$ die Eigenschaft (DN) besitzt.

3.7 Beispiele:

(1) p sei eine Gewichtsfunktion mit $p(2z) \geq Cp(z) - C$ für ein geeignetes $C>1$. Dann gilt nach Meise [7], 2.9.:

$$A_p \simeq \Lambda_\infty(j)'_b$$

(2) Für jedes $\alpha \in (0,1)$ ist

$$p(z) = \exp((\ln(1 + |z|^2))^\alpha)$$

nach [10], 3.5(3), eine (DN)-Gewichtsfunktion, die nicht in die unter (1) beschriebene Klasse fällt.

(3) Sei p eine Gewichtsfunktion mit:

(*) Es gibt $C>c>2$ und $x_0 > 0$, so daß für $x>x_0$: $cp(x) \leq p(x^2) \leq Cp(x)$.

Sei $\phi(x) = p(e^x)$, $\alpha_j = \phi^*(j)$. Dann ist die folgende Abbildung ein Isomorphismus:

$$T: A_p \longrightarrow \Lambda_1(\alpha)'_b$$

$$f \longmapsto \left(\frac{f^{(j)}(0)}{j!}\right)_{j \in \mathbb{N}_0}$$

Bew: Setze $h(x) = \phi^*(x)/x$. Da ϕ^* konvex ist, gibt es ein $A>0$, so daß $h|[A,\infty)$ streng monoton wächst. Sei $y_0 = h^{-1}(\max(A, x_0))$, und sei $y \geq y_0$. Dann gibt es ein ξ mit $\phi^*(y) = \xi y - \phi(\xi)$, d. h. $h(y) = \xi - \frac{\phi(y)}{y}$. Wegen $y \geq y_0$ gilt $\xi \geq x_0$. Daher folgt aus (*) für $y \geq y_0$:

$$\phi^*(y) = \sup 2xy - \phi(2x) \leq \sup 2xy - c\phi(x) = c\phi^*\left(\frac{2}{c}y\right).$$

Nach Substitution $d := \frac{c}{2} > 1$ erhalten wir für $y \geq dy_0$:

$$\phi^*(dy) \leq 2d\phi^*(y) \quad \text{und daraus}$$

(i) $\quad h(2y) \leq mh(y) \quad$ mit $\quad m = 2^{1+(\ln 2)/(\ln d)}$.

Entsprechend gilt für $D := \frac{C}{2}$ und $y \geq Dy_0$:

(ii) $\quad h(Dy) \geq 2h(y)$.

Nach 3.4 gilt $A_p \simeq \lambda(B)'_b$ mit $b_{jk} = \exp(-jh(\frac{j}{k}))$.

Für $k = 2^n$ folgt mit (i)

$$b_{jk} \leq \exp(-\frac{j}{m^n} h(j)) = (\exp(\frac{-1}{m^n}))^{\alpha_j},$$

und mit (ii)

$$(\exp(\frac{-1}{2^n}))^{\alpha_j} = \exp(-\frac{j}{2^n} h(j)) \leq \exp(-j\, h(\frac{j}{D^n})).$$

(4) Sei für $s>1$, $a \in \mathbb{R}$:

$$p(z) = (\ln(1 + |z|^2))^s (\ln \ln(3 + |z|^2))^a.$$

Nach (3) gilt $A_p \simeq \Lambda_1(\alpha)'_b$ für $\alpha_j = \phi^*(j)$.

Aus [7], 2.13(2), ist für $a=0$ bekannt, daß man $\alpha_j = j^{\frac{s}{s-1}}$ wählen kann.

Für $a \neq 0$ läßt sich ϕ^* nur näherungsweise bestimmen:

Nach Übergang zu einem äquivalenten p gilt $\phi(x) = x^s (\ln x)^a$.

$\phi'(x) = x^{s-1} (\ln x)^a (s + \frac{a}{\ln x})$ ist für große x streng monoton wachsend, also invertierbar. Die Funktion $x \mapsto xy - \phi(x)$ nimmt ihr Maximum für $x = (\phi')^{-1}(y)$ an. Setze

$$\xi(y) = \left(\frac{y}{s(\frac{1}{s-1} \ln y)^a} \right)^{\frac{1}{s-1}} \quad , \text{ dann gilt}$$

$$\phi'(\xi(y)) = \frac{y}{s(\frac{1}{s-1} \ln y)^a} \left(\frac{\ln \frac{y}{s} - a \ln \frac{\ln y}{s-1}}{s-1} \right)^a \cdot$$

$$\cdot \left(s + \frac{a(s-1)}{\ln \frac{y}{s} - a \ln \frac{\ln y}{s-1}} \right) .$$

$$y \left(1 - \frac{\ln s + a \ln \frac{\ln y}{s-1}}{\ln y} \right)^a \left(1 + \frac{a(1 - \frac{1}{s})}{\ln \frac{y}{s} - a \ln \frac{\ln y}{s-1}} \right) .$$

Folglich gilt $\lim_{y\to\infty} \frac{\phi'(\xi(y))}{y} = 1$, d.h. für jedes $\varepsilon>0$ gibt es ein y_ε mit

$$\xi((1-\varepsilon)y) \leqq (\phi')^{-1}(y) \leqq \xi((1+\varepsilon)y) \quad \text{für } y \geqq y_\varepsilon .$$

Daraus folgt für $y \geqq y_\varepsilon$:

$$\phi^*(y) \geqq y\xi((1-\varepsilon)y) - \phi(\xi((1+\varepsilon)y)) =$$

$$\frac{y^{\frac{s}{s-1}}}{(\ln y)^{\frac{a}{s-1}}}(s-1)^{\frac{a}{s-1}}\left(\left(\frac{1-\varepsilon}{s(1+\frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln y})^a}\right)^{\frac{1}{s-1}} - \left(\frac{1+\varepsilon}{s^s(1+\frac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln y})^a}\right)^{\frac{1}{s-1}} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot\left(1 + \frac{\ln\frac{1+\varepsilon}{s} - a\ln\frac{\ln(1+\varepsilon)y}{s-1}}{\ln y}\right)^a\right)$$

folglich

$$\liminf_{y\to\infty} \frac{\phi^*(y)}{y^{\frac{s}{s-1}}(\ln y)^{\frac{-a}{s-1}}} \geqq (s-1)^{\frac{a}{s-1}}\left(s^{\frac{-1}{s-1}} - s^{\frac{-s}{s-1}}\right) .$$

Da man ebenso die umgekehrte Ungleichung für den lim sup zeigen kann, folgt mit (3), daß man wählen kann:

$$\alpha_j = \frac{j^{\frac{s}{s-1}}}{(\ln j)^{\frac{a}{s-1}}} .$$

(5) In [10], 3.7(3), geben Meise und Taylor Gewichtsfunktionen p an, die keine (DN)-Gewichtsfunktionen sind, für die aber A_p unendlich-codimensionale komplementierte Ideale I enthält. Da nach [7],3.8., $A_p/I \simeq \Lambda_\infty(\beta)'_b$ für ein geeignetes β und da $\Lambda_\infty(\beta)$ kein projizierter Unterraum eines Potenzreihenraumes von endlichem Typ sein kann, ist $(A_p)'_b$ nicht isomorph zu einem Potenzreihenraum.

3.8 Satz:

Sei p eine Gewichtsfunktion, $\phi(x) = p(e^x)$. Für $B = (\exp(\frac{1}{k}\phi^*(kj)))_{j\in\mathbb{N}_0, k\in\mathbb{N}}$ *ist die Abbildung*

$$T: A_p^0 \longrightarrow \lambda(\mathbb{N}_0, B), \quad f \longmapsto \left(\frac{f^{(j)}(0)}{j!}\right)_j$$

ein Isomorphismus, für den $L, M, C_k, D_k > 0$ *existieren, so daß für alle* $k\in\mathbb{N}$:

(1) $\pi_k(T(f)) \leq C_k \|f\|_{Lk}$ *und*

(2) $\|f\|_k \leq D_k \pi_{Mk}(T(f))$.

Bew: Nach [9], 1.10., gelten:

(3) $$\sup \left|\frac{f^{(j)}(0)}{j!}\right| \exp(\tfrac{1}{k}\phi^*(kj)) \leq \|f\|_k$$

(4) $$\sup |f(z)| \exp(-\tfrac{1}{k}p(2z)) \leq 2 \sup \left|\frac{f^{(j)}(0)}{j!}\right| \exp(\tfrac{1}{k}\phi^*(kj)).$$

Nach 3.1 existieren $M\in\mathbb{N}$, $C>0$ mit $p(2z) \leq Mp(z) + C$. Daher folgt (1) aus (4).

Nach Voraussetzung gibt es $L\in\mathbb{N}$ und $y_0 > 0$, so daß für $y \geq y_0$ gilt: $\phi(y+1) \leq L\phi(y)$. Daraus folgt die Existenz eines $x_0 > 0$ mit $\frac{1}{L}\phi^*(Lx) - \phi^*(x) \geq x$ für alle $x \geq x_0$. Mit diesem L folgt aus (3) für große k:

$$\pi_k(T(f)) = \sum_{j=0}^{\infty} \left|\frac{f^{(j)}(0)}{j!}\right| \exp(\tfrac{1}{Lk}\phi^*(Lkj)) \frac{\exp(\frac{1}{k}\phi^*(kj))}{\exp(\frac{1}{Lk}\phi^*(Lkj))} \leq$$

$$\|f\|_{Lk} \sum_{j=0}^{\infty} \exp(-\tfrac{1}{k}kj).$$

Durch eventuelle Vergrößerung von L erhält man (1) für alle k.

Wir werden bei der Untersuchung der topologischen Struktur abgeschlossener Ideale in solchen A_p^0, die isomorph zu einem $\Lambda_\infty(\alpha)$ sind, das Theorem 1.11 von Vogt über die Bilder linear zahmer Abbildungen einsetzen. Dazu werden bestimmte Voraussetzungen an den Isomorphismus benötigt. Mit dem folgenden Satz ist es möglich, zu überprüfen, ob diese erfüllt sind.

3.9 Satz:

p sei eine Gewichtsfunktion, $\phi(x) = p(e^x)$, $h(x) = \frac{\phi^*(x)}{x}$.
Es gebe $k,l,m \in \mathbb{N}$ *sowie monoton wachsende Folgen* $(a_n)_n$, $(A_n)_n$ *in* $(0,\infty)$ *mit*

(i) $a_n < \liminf_{j\to\infty} \frac{h(nmj) - h(kj)}{h(lj) - h(kj)}$

(ii) $\limsup_{y\to\infty} \frac{h(nmj) - h(kj)}{h(lj) - h(kj)} < A_n$

(iii) $\limsup \frac{A_{2n}}{a_n} < \infty$.

Dann ist für $\alpha_j = j(h(lj) - h(kj))$ *und* $\Delta_j = \exp(jh(kj))$
die Abbildung

$$S: A_p^0 \to \Lambda_\infty(\alpha),\ f \longmapsto (\Delta_j \frac{f^{(j)}(0)}{j!})_{j\in\mathbb{N}_0}$$

ein Isomorphismus, der der folgenden Bedingung (Z) genügt:

(Z)
Es gibt ein $\mu \in \mathbb{N}$ *sowie monoton wachsende unbeschränkte Folgen* $(\sigma_\nu)_\nu$ *und* $(\rho_\nu)_\nu$ *in* $\mathbb{N}$ *mit* $\sigma_\nu \leq \rho_\nu$ *und*
(α) *Für alle* $\nu \geq \mu$ *existiert ein* C *mit* $\pi_{\sigma_\nu} \cdot S \leq C \|\cdot\|_\nu$
(β) *Für alle* ν *existiert ein* C *mit* $\|\cdot\|_\nu \leq C\pi_{\rho_\nu} \cdot S$
(γ) $\sup \frac{\ln \rho_{\nu+1}}{\ln \sigma_\nu} < \infty$.

Bew: L,M,B und T seien wie in 3.8. Die Normen auf $\lambda(B)$ bezeichnen wir mit π_k^B. Setze $\mu = mL$. Für $\nu \geq \mu$ sei $n = \left[\frac{\nu}{mL}\right]$, $\sigma_\nu = \exp(a_n)$. Es gilt für große j:

$$\pi_{\sigma_\nu}((\Delta_i \delta_{ij})_i) = \exp(jh(kj))\exp(\ln \sigma_\nu)(j(h(lj)-h(kj))) \overset{(i)}{\leq}$$
$$\exp(jh(kj) + j(h(nmj)-h(kj))) = \pi_{mn}^B(\delta_{ij}).$$

Mit geeignetem C_2 gilt daher:

$$\pi_{\sigma_\nu}(S(f)) = \sum_j \left|\frac{f^{(j)}(0)}{j!}\right| \pi_{\sigma_\nu}((\Delta_i \delta_{ij})_i) \leq C_2 \sum_j \left|\frac{f^{(j)}(0)}{j!}\right| \pi_{mn}^B(\delta_{ij}) =$$
$$C_2 \pi_{mn}^B(T(f)) \leq C_3 \|f\|_{mnL} \leq C_3 \|f\|_\nu .$$

Sei $\tilde{n} = \left[\frac{M\nu}{m}\right] + 1$ und $\rho_\nu = \exp(A_{\tilde{n}})$. Dann gilt für große j:
$\pi_{\rho_\nu}((\Delta_i \delta_{ij})_i) \geq \pi_{m\tilde{n}}^B(\delta_{ij})$. Daraus folgt wie oben:
$\pi_{\rho_\nu}(S(f)) \geq C_4 \pi_{m\tilde{n}}^B(T(f)) \geq C_5 \pi_{M\nu}^B(T(f)) \geq C_6 \|f\|_\nu$.

$\frac{\ln \rho_{\nu+1}}{\ln \sigma_\nu} = \frac{A\left[\frac{M(\nu+1)}{m}\right]+1}{a\left[\frac{\nu}{Lm}\right]}$ ist beschränkt nach (iii).

3.10 Beispiele:

(1) p sei eine Gewichtsfunktion mit $p(2z) \geq Cp(z) - C$ für ein geeignetes $C>1$. Dann gibt es einen Isomorphismus $S: A_p^0 \longrightarrow \Lambda_\infty(j)$, der der Bedingung (Z) genügt.
Das zeigt der Beweis von [7],1.16.

(2) Für $0 < \alpha < 1$ sei

$$p(z) = \frac{1}{\alpha} \exp((\ln(1 + |z|^2))^\alpha).$$

Dann gibt es für $\gamma_j = j(\ln j)^{1/\alpha - 1}$ einen Isomorphismus $S: A_p^0 \longrightarrow \Lambda_\infty(\gamma)$ mit (Z).
Bew: Es ist $\phi(x) = \frac{1}{\alpha} \exp(x^\alpha)$, $\phi'(x) = x^{\alpha-1}\exp(x^\alpha)$.
Wir zeigen zunächst:

Für große y gilt

(1) $\phi'((\ln y + \frac{1-\alpha}{\alpha} \ln \ln y)^{1/\alpha}) < y <$
$\phi'((\ln y + \frac{1-\alpha}{\alpha} \ln \ln y + 1)^{1/\alpha})$.

Bew: $\phi'((\ln y + \frac{1-\alpha}{\alpha} \ln \ln y)^{1/\alpha}) =$
$(\ln y + \frac{1-\alpha}{\alpha} \ln \ln y)^{1 - 1/\alpha}\ y\ (\ln y)^{1/\alpha - 1} < y.$
Analog gilt:
$\frac{1}{y}\ \phi'((\ln y + \frac{1-\alpha}{\alpha} \ln \ln y + 1)^{1/\alpha}) \xrightarrow{y\to\infty} e,$
woraus die zweite Ungleichung folgt.

Nun zeigen wir

(2) Für große y gilt
$y\ ((\ln y)^{1/\alpha} + \frac{1-\alpha}{\alpha^2}\ (\ln y)^{1/\alpha - 1}(\ln \ln y) - e(\ln y)^{1/\alpha - 1})$
$\leq \phi^*(y) \leq$
$y\ ((\ln y)^{1/\alpha} + \frac{1-\alpha}{\alpha^2}\ (\ln y)^{1/\alpha - 1}(\ln \ln y) + \frac{2}{\alpha}(\ln y)^{1/\alpha - 1}).$

Bew: Für $\frac{x}{h} >> 1$ gilt:
(3) $(x + h)^{1/\alpha} \leq x^{1/\alpha} + \frac{1}{\alpha} x^{1/\alpha - 1} h + \frac{1-\alpha}{\alpha^2} x^{1/\alpha - 2} h^2.$
$\phi^*(y) = y\,(\phi')^{-1}(y) - \phi((\phi')^{-1}(y)) \leq$ (mit (1))
$y\ (\ln y + \frac{1-\alpha}{\alpha} \ln \ln y + 1)^{1/\alpha} - \phi((\ln y + \frac{1-\alpha}{\alpha} \ln \ln y)^{1/\alpha}) \leq$

$$y\left((\ln y + \frac{1-\alpha}{\alpha}\ln\ln y)^{1/\alpha} + \frac{2}{\alpha}(\ln y)^{1/\alpha-1}\right) - y(\ln y)^{1/\alpha-1}$$

$$\overset{(3)}{\leq} y\left((\ln y)^{1/\alpha} + \frac{1-\alpha}{\alpha^2}(\ln y)^{1/\alpha-1}\ln\ln y + \frac{(1-\alpha)^3}{\alpha^4}(\ln y)^{1/\alpha-2}(\ln\ln y)^2 + (\frac{2}{\alpha}-1)(\ln y)^{1/\alpha-1}\right).$$

$$\phi^*(y) \geq$$

$$y\left(\ln y + \frac{1-\alpha}{\alpha}\ln\ln y\right)^{1/\alpha} - \phi\left((\ln y + \frac{1-\alpha}{\alpha}\ln\ln y + 1)^{1/\alpha}\right) \geq$$

$$y\left((\ln y)^{1/\alpha} + \frac{1-\alpha}{\alpha^2}(\ln y)^{1/\alpha-1}\ln\ln y - e(\ln y)^{1/\alpha-1}\right).$$

Nun können wir für $h(x) = \frac{\phi^*(x)}{x}$ zeigen:

Für alle n gilt für große j:

$$(4)\quad \frac{\ln n}{\alpha} - 3 - \frac{2}{\alpha} \leq \frac{h(nj) - h(j)}{\gamma_j} \leq \frac{\ln n}{\alpha} + 3 + \frac{2}{\alpha}$$

Bew: Für $f(x) = x^{1/\alpha-1}\ln x$ gilt

$$f'(x) = x^{1/\alpha-2}((\tfrac{1}{\alpha}-1)\ln x + 1),$$

also für große x:

$$(5)\quad (\tfrac{1}{\alpha}-1)\,x^{1/\alpha-2}\ln x \leq f'(x) \leq \tfrac{1}{\alpha}\,x^{1/\alpha-2}\ln x\,.$$

$$h(nj) - h(j) \overset{(2)}{\leq} (\ln nj)^{1/\alpha} + \frac{1-\alpha}{\alpha^2}(\ln nj)^{1/\alpha-1}\ln\ln nj + \frac{2}{\alpha}(\ln nj)^{1/\alpha-1} - (\ln j)^{1/\alpha} - \frac{1-\alpha}{\alpha^2}(\ln j)^{1/\alpha-1}\ln\ln j + e(\ln j)^{1/\alpha-1} =$$

$$(\ln j + \ln n)^{1/\alpha} - (\ln j)^{1/\alpha} + \frac{1-\alpha}{\alpha^2}(f(\ln j + \ln n) - f(\ln j)) + \frac{2}{\alpha}(\ln j + \ln n)^{1/\alpha-1} + e(\ln j)^{1/\alpha-1} \leq \quad (\text{mit}(5))$$

$$\frac{1}{\alpha}(\ln n)(\ln j + \ln n)^{1/\alpha-1} + 2\frac{1-\alpha}{\alpha^3}(\ln j)^{1/\alpha-2}\ln\ln nj + \frac{2}{\alpha}(\ln j + \ln n)^{1/\alpha-1} + e(\ln j)^{1/\alpha-1}\,.$$

Wegen $\gamma_j = (\ln j)^{1/\alpha-1}$ folgt die zweite Ungleichung von (4). Der Beweis der ersten verläuft völlig analog.

(3) Für $s>1$ und $a\in\mathbb{R}$ seien

$$p(z) = (\ln(1+|z|^2))^s(\ln\ln(3+|z|^2))^a,\quad \alpha_j = \frac{j^{\frac{s}{s-1}}}{(\ln j)^{\frac{a}{s-1}}}.$$

Dann ist die folgende Abbildung ein Isomorphismus, der der Bedingung (Z) genügt:

$$T: A^0_p \longrightarrow \Lambda_\infty(\alpha),\ f \mapsto \left(\frac{f^{(j)}(0)}{j!}\right)_{j\in\mathbb{N}_0}.$$

Bew: In 3.7(4) haben wir gezeigt, daß für ein äquivalentes p und $g(y) = y^{\frac{1}{s-1}}(\ln y)^{\frac{-a}{s-1}}$ mit geeigneten d,D>0 für y>e gilt $d\,g(y) \leq h(y) \leq D\,g(y)$.

Wähle $1 > \left(\frac{D}{d}\right)^{s-1}$, dann gilt für alle n:

$$\frac{h(nj)-h(j)}{h(1j)-h(j)} \leq \frac{D\,g(nj)-d\,g(j)}{d\,g(1j)-D\,g(j)} =$$

$$\frac{D\,n^{\frac{1}{s-1}}(1+\frac{\ln n}{\ln j})^{\frac{-a}{s-1}} - d}{d\,1^{\frac{1}{s-1}}(1+\frac{\ln 1}{\ln j})^{\frac{-a}{s-1}} - D} \xrightarrow{j\to\infty} \frac{D\,n^{\frac{1}{s-1}} - d}{d\,1^{\frac{1}{s-1}} - D} =: A_n.$$

Entsprechend gilt $a_n := \frac{d\,n^{\frac{1}{s-1}} - D}{D\,1^{\frac{1}{s-1}} - d}$

Mit 3.9 folgt für $\beta_j = j\,h(1j) - j\,h(j)$, daß
$S: A_p^0 \to \Lambda_\infty(\beta)$, $f \longmapsto (\Delta_j \frac{f^{(j)}(0)}{j!})_j$ für $\Delta_j = \exp(\phi^*(j))$ ein Isomorphismus mit (Z) ist. Die zu S gehörigen Radienfolgen heißen σ_k und ρ_k.

Für große j gilt wegen $h(1j) \leq D\,1^{\frac{2}{s-1}}\,g(j)$:

$$\|z^j\|_k \leq \pi_{\rho_k}(S(z^j)) = \exp(j\,h(j) + (\ln \rho_k)(j\,h(1j) - j\,h(j))) \leq$$

$$\exp(j\,D\,g(j) + (\ln \rho_k)\,D\,1^{\frac{2}{s-1}}\,j\,g(j) - (\ln \rho_k)\,d\,j\,g(j)) \leq$$

$\pi_{\tilde{\rho}_k}(T(z^j))$ für $\tilde{\rho}_k = \exp((\ln \rho_k)\,D\,1^{\frac{2}{s-1}} - d \ln \rho_k + D)$.
Analog erhält man ein $\tilde{\sigma}_k$.

(4) Man zeigt leicht, daß für die in [10],3.7(1), angegebenen Gewichtsfunktionen p der Raum A_p^0 die Eigenschaft (Ω) nicht hat. Alle zu solchen p gehörigen A_p^0 sind folglich keine Potenzreihenräume.

3.11 Bemerkung:
A_p^0 ist keine F-Algebra.
Beweis durch Widerspruch: Angenommen es gebe eine submultiplikative Norm $\|.\| \geq \frac{1}{C}\|.\|_1$ für C>0 geeignet. Dann existieren k>1 und ein D mit $\|.\| \leq D\|.\|_k$. Es gilt für alle n:

$$\|z^n\|_1 \leq C\|z^n\| \leq C\|z\|^n \leq C\, D^n \|z\|_k^n,$$

d. h. für alle n gilt:

$$\sup r^n e^{-p(r)} \leq C(D\|z\|_k)^n.$$

Setzt man auf der linken Seite speziell $r = 2D\|z\|_k$ ein, so ergibt sich für große n ein Widerspruch.

Unabhängig von 3.11 können die Methoden des Kapitels 2 allein schon wegen der unterschiedlichen Struktur der Quotienten nicht angewandt werden. Als Quotienten nach abgeschlossenen Idealen in A_p^0 treten nämlich Potenzreihenräume von endlichem Typ auf (s. Meise und Taylor [9],2.8.), aber nie $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

3.12 Theorem (Taylor [17], Thm. 7.2.):
Sei $E = A_p$ *oder* $E = A_p^0$ *für eine Gewichtsfunktion* p, *und sei* $I \neq \{0\}$ *ein abgeschlossenes Ideal in* E. *Dann gibt es eine diskrete abgeschlossene Teilmenge* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von* $\mathbb{C}$ *sowie eine Folge* $(m_n)_n$ *von Vielfachheiten* $m_n \in \mathbb{N}$ *mit*

$$I = \{f \in E \mid f^{(j)}(z_n) = 0 \text{ für } 0 \leq j < m_n\}.$$

3.13 Bezeichnung:
Sei p eine Gewichtsfunktion, und seien $F_1,\ldots,F_n \in A_p$. Dann bezeichnet man für $\varepsilon, C>0$ mit $S_p(F;\varepsilon,C)$ die Menge

$$S_p(F;\varepsilon,C) = \{z\in\mathbb{C} \mid \Big(\sum_{j=1}^{n} |F_j(z)|^2\Big)^{1/2} \leq \varepsilon\, e^{-Cp(z)}\}.$$

Der Index p wird oft weggelassen.

3.14 Satz (Berenstein und Taylor [1], Prop. 4):
Für $(F_1,\ldots,F_n) \neq 0$ *existieren* $\varepsilon,C,D>0$, *so daß für alle Zusammenhangskomponenten* S *von* $S(F;\varepsilon,C)$ *gilt:*

$$\sup_{z\in S} p(z) \leq D \inf_{z\in S} p(z) + D.$$

3.15 Theorem (Semilokaler Interpolationssatz, Berenstein und Taylor [1], p. 110):
Sei p *eine Gewichtsfunktion,* $F = (F_1,\ldots,F_n) \in A_p^n$, $\tilde{\lambda}$ *sei analytisch auf* $S(F;\varepsilon,C)$, *und es gebe* A,B *mit*

$$|\tilde{\lambda}(z)| \leq A\, e^{Bp(z)} \text{ für alle } z\in S(F;\varepsilon,C).$$

Dann existieren eine Funktion $\lambda\in A_p$, $\varepsilon_1,C_1>0$, *sowie analytische Funktionen* $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ *auf* $S(F;\varepsilon_1,C_1)$ *mit*

$$\lambda(z) = \tilde{\lambda}(z) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(z)\, F_i(z) \text{ für alle } z\in S(F;\varepsilon_1,C_1).$$

Es gibt auch einen semilokalen Interpolationssatz für A_p^0 (s. Meise und Taylor [9], Prop. 2.2.). Er wird in dieser Arbeit aber nicht benötigt, man kann nämlich in einfachen Fällen Interpolationsprobleme in A_p^0 mit dem folgenden Lemma auf solche in einem geeigneten A_q zurückführen.

3.16 Lemma:
Sei p *eine Gewichtsfunktion und* $f\in A_p^0$. *Dann gibt es eine Gewichtsfunktion* q *mit*
(1) $f\in A_q$
(2) $q(z) = o(p(z))$
Bew: Meise und Taylor zeigen in [9],2.3, daß es ein solches q gibt, welches allerdings statt 3.1(2) a priori nur der Forderung $\ln(1+|z|^2) = O(q(z))$ zu genügen braucht. Daraus folgt 3.1(2) aber wie folgt:

O.B.d.A. sei $q(1)=0$. $f\in A^0_p$ sei kein Polynom, wähle $A>0$ mit $\sup |f(z)|e^{-Aq(z)} =: C < \infty$. Zu $n\in\mathbb{N}$ beliebig existiert z_0 mit $|f(z_0)| \geqq C|z_0|^n$, daraus folgt für $r_0=|z_0|$: $n \ln r_0 \leqq A\, q(r_0)$. Weil $x \longmapsto q(e^x)$ konvex ist und $q(1)=0$ gilt, folgt für $r\geqq r_o$: $q(r) \geqq \frac{n}{A} \ln r$.
Falls f ein Polynom ist, wählt man q zu einem $\tilde{f}\in A^0_p$, welches kein Polynom ist.

B Erzeugendensysteme abgeschlossener Ideale

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß jedes abgeschlossene Ideal in A_p bzw. in A_p^0 algebraisch von zwei Elementen erzeugt wird.
Das Ergebnis wird zuerst für A_p bewiesen und dann mittels 3.16 auf A_p^0 übertragen.
Die Konstruktion besteht darin, die Nullstellenmenge des Ideals auf zwei verschiedene Weisen zu Nullstellenmengen von Funktionen $F,G \in A_p$ zu ergänzen. Hierbei muß dafür gesorgt werden, daß für geeignete $\varepsilon, C>0$ diejenigen Komponenten von $S(G;\varepsilon,C)$, die Nullstellen von G enthalten, welche nicht zum Ideal gehören, disjunkt zu $S(F;\varepsilon,C)$ sind.
Dabei sind zwei Sätze entscheidend:
Erstens Theorem 3.18 von Rubel und Taylor, welches ein Kriterium dafür liefert, ob es zu einer vorgegebenen Punktfolge eine Funktion in A_p mit dieser Folge als Nullstellenmenge gibt, und zweitens das Boutroux-Cartan-Lemma (3.26), welches es ermöglicht, aus der Lage der Nullstellen von G Rückschlüsse auf die Größe der Komponenten von $S(G;\varepsilon,C)$ zu ziehen.

Abweichend von der Schreibweise bei 3.12 werden im folgenden mehrfache Nullstellen durch entsprechende Wiederholung in der Folge aller Nullstellen dargestellt, d. h. die Folge $(\zeta_n)_n$ wird als Nullstellenmenge des Ideals I bezeichnet, falls für $f \in A_p$ genau dann $f \in I$ gilt, wenn für alle $z \in \mathbb{C}$ die Funktion f mindestens von der Ordnung $|\{n|\zeta_n=z\}|$ in z verschwindet. Diese Folge wird mit V(I) bezeichnet und, falls I von $f_1,\ldots,f_n \in A_p$ erzeugt wird, auch mit $V(f_1,\ldots,f_n)$. Folgen, die durch Permutation von $\mathbb{N}$ auseinander hervorgehen, werden nicht unterschieden.

3.17 Bezeichnung:

Sei $(\zeta_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ ohne Häufungspunkt in $\mathbb{C}$, dann setzt man

$$n_\zeta(r) = |\{n \mid |\zeta_n| \leq r\}|.$$

$$N_\zeta(r) = \int_0^r \frac{n_\zeta(t)}{t}\, dt,$$

$$s_\zeta(r,k) = \frac{1}{k} \sum_{|\zeta_i| \leq r} \zeta_i^{-k}.$$

Ist $\zeta = V(f)$ für ein $f \in A_p$, so schreibt man auch n_f, N_f statt n_ζ, N_ζ. Wenn keine Verwechselungen zu befürchten sind, wird der Index oft weggelassen.

Für $f \in A_p$ setzt man schließlich noch

$$M_f(r) = \sup_{|z| \leq r} |f(z)|.$$

3.18 Theorem (Rubel und Taylor):

Sei p eine Gewichtsfunktion, seien $k_0 \in \mathbb{N}$ und $C>0$ so gewählt, daß $p(2r) \leq 2^{k_0-1} p(r) + C$ für alle $r>0$. Dann gilt für jede Folge $(\zeta_n)_n \in (\mathbb{C}\setminus\{0\})^{\mathbb{N}}$ ohne Häufungspunkte:

Es gibt genau dann ein $f \in A_p$ mit $V(f) = (\zeta_n)_n$, wenn (1) und (2) erfüllt sind:

(1) Es gibt $A>0$, so daß für alle $r>0$ gilt

$$N(r) \leq A\, p(r) + A$$

(2) Es gibt $A>0$, so daß für $k=1,\ldots,k_0$ ein $\alpha_k \in \mathbb{C}$ existiert, für welches für alle $r>0$ gilt:

$$|\alpha_k + s(r,k)| \leq \frac{Ap(r) + A}{r^k}$$

Bew: Aus Theorem 5.2. und Prop. 1.14. von [16] folgt das Theorem, wenn man (2) für alle $k \in \mathbb{N}$ verlangt. Daß man sich auf endlich viele k beschränken kann, zeigt der Beweis von [16], Prop. 3.5.

3.19 Satz:

Sei p eine differenzierbare Gewichtsfunktion. Falls das Intervall $\left[\liminf\limits_{r\to\infty} \frac{r\,p'(r)}{p(r)},\ \limsup\limits_{r\to\infty} \frac{r\,p'(r)}{p(r)}\right]$ *keine natürliche Zahl enthält, so ist jedes abgeschlossene Ideal in* A_p *ein Hauptideal.*

(0 ist keine natürliche Zahl!)

Bew: (Der Beweis ist eine Variation des Beweises von [16], 3.5.)

Wir nehmen o.B.d.A. $p(0)\neq 0$ an.

Sei $(z_n)_n$ die Nullstellenmenge des Ideals $I\neq\{0\}$.

Es genügt zu zeigen, daß $(z_n)_n$ die Voraussetzungen von 3.18 erfüllt. Dann existiert nämlich ein $F\in I$ mit genau den z_n als Nullstellen (mit Vielfachheiten), wegen 3.12 folgt daraus $I\simeq FA_p$.

Bedingung (1) von 3.18 ist klar, da es eine Funktion $0\neq f\in I$ gibt.

Der Beweis von [16],1.14., zeigt, daß zum Nachweis von (2) der Nachweis der folgenden Bedingung genügt:

$$(*)\quad \forall k\leq k_0\ \exists A\ \forall r,\rho>0:\ |s(r,k)-s(\rho,k)| \leq \frac{Ap(r)}{r^k} + \frac{Ap(\rho)}{\rho^k}$$

Es gilt für $r>\rho$:

$$|s(r,k)-s(\rho,k)| \leq \frac{1}{k} \sum_{\rho<|z_n|\leq r} \frac{1}{|z_n|^k} =$$

$$\frac{1}{k}\frac{n(r)}{r^k} - \frac{1}{k}\frac{n(\rho)}{\rho^k} + \int_\rho^r \frac{n(t)}{t^{k+1}}\,dt \leq$$

$$\frac{Bp(r)}{r^k} + \frac{Bp(\rho)}{\rho^k} + \int_\rho^r \frac{Bp(t)}{t^{k+1}}\,dt,$$

wobei zum Schluß die Jensen-Formel verwendet wird.

Sei $k < \liminf \frac{rp'(r)}{p(r)}$, dann gibt es $\alpha>k$ und $R>0$, so daß für alle $t>R$: $\frac{tp'(t)}{p(t)} \geq \alpha$. Dann gilt für $R\leq\rho<r$:

$$p'(t) - \frac{kp(t)}{t} \geq (\alpha-k)\frac{p(t)}{t} \Rightarrow \frac{p(t)}{t^{k+1}} \leq \frac{1}{(\alpha-k)}\left(\frac{p'(t)}{t^k} - \frac{k\,p(t)}{t^{k+1}}\right) \Rightarrow$$

$$\int_\rho^r \frac{p(t)}{t^{k+1}}\,dt \leq \frac{1}{(\alpha-k)}\int_\rho^r \left(\frac{p'(t)}{t^k} - \frac{k\,p(t)}{t^{k+1}}\right)dt = \frac{1}{\alpha-k}\int_\rho^r \left(\frac{p(t)}{t^k}\right)'dt -$$

$$\frac{1}{(\alpha-k)}\left(\frac{p(r)}{r^k} - \frac{p(\rho)}{\rho^k}\right).$$

Sei $k > \limsup \frac{rp'(r)}{p(r)}$, dann gibt es $\beta<k$ und $R>0$, so daß für alle $t>R$: $\frac{tp'(t)}{p(t)} \leq \beta$. Dann gilt für $R\leq\rho\leq r$:

$$\int_\rho^r \frac{p(t)}{t^{k+1}}\,dt = -\frac{1}{k}\frac{p(t)}{t^k}\Big|_\rho^r - \int_\rho^r \left(-\frac{1}{k}\frac{p'(t)}{t^k}\right) dt \leq$$

$$\frac{1}{k}\frac{p(\rho)}{\rho^k} - \frac{1}{k}\frac{p(r)}{r^k} + \frac{\beta}{k}\int_\rho^r \frac{p(t)}{t^{k+1}}\,dt \quad \Rightarrow$$

$$\left(1-\frac{\beta}{k}\right)\int_\rho^r \frac{p(t)}{t^{k+1}}\,dt \leq \frac{1}{k}\frac{p(\rho)}{\rho^k} - \frac{1}{k}\frac{p(r)}{r^k}\,.$$

Da jedes $k\in\mathbb{N}$ nach Voraussetzung durch einen der beiden Fälle erfaßt wird, gilt (*) für hinreichend große r und ρ. Durch einen Kompaktheitsschluß erhält man (*) für alle r,ρ.

Es gibt aber auch hinlänglich viele Beispiele für Gewichtsfunktionen p, für die A_p abgeschlossene Ideale enthält, die keine Hauptideale sind:

3.20 Satz:
Sei $f\in C^1[0,\infty)$ *monoton wachsend und unbeschränkt mit* $f(0)\geq 1$, *sei* $k\in\mathbb{N}$. *In den folgenden Fällen gibt es in* A_p *abgeschlossene Ideale, die keine Hauptideale sind:*

a) $p(z) = |z|^k f(|z|^k)$ *sei eine Gewichtsfunktion und*
f erfülle
(i) $x \mapsto x f'(x)$ *ist monoton wachsend für* $x>x_0$, x_0 *geeignet, und*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{x f'(x)}{f(x)} \ln f(x) < 1$$

oder
(ii) $x \mapsto x f'(x)$ *ist beschränkt.*

b) $p(z) = \frac{|z|^k}{f(|z|^k)}$ *sei eine Gewichtsfunktion und* $x \mapsto x f'(x)$ *sei beschränkt.*

Bew: Wir beweisen nur a) (i), die anderen Beweise sind ähnlich.
Sei $g(x)=f(e^x)$, $g'(x) = e^x f'(e^x)$. Für $y>0$ und $t=\frac{1}{f(y)}$ gilt:
$f(yt) = g(\ln y + \ln t) = g(\ln y) + g'(\ln \eta)\ln t =$
$f(y) + \eta f'(\eta)\ln t$, wobei $\eta\in(ty,y)$.

Nach Voraussetzung existieren $C>0$, $0<\varepsilon<1$, so daß für alle $x>C$ $\frac{f'(x)\,x}{f(x)} \ln f(x) \leq 1-\varepsilon$. Daraus folgt
$\eta f'(\eta) \ln t \geq y f'(y) \ln t - y f'(y) \ln f(y) \geq (\varepsilon-1) f(y)$, also

(1) $f(\frac{y}{f(y)}) \geq \varepsilon f(y)$ für große y.

Sei $z_m = \left(\frac{m}{f(m)}\right)^{1/k}$ und $I = \{F \in A_p \mid F(z_m) = 0 \text{ für alle } m\}$.
Für große m ist $z_m < z_{m+1}$. Daher gilt

$n(r) = m$ für $z_m \leq r < z_{m+1}$.

Wir zeigen zunächst $n(r) \leq A\, p(r)$ für ein geeignetes $A>0$.
Weil p monoton wächst, genügt der Nachweis von $m \leq A\, p(z_m)$.
Für große m gilt wegen (1):
$p(z_m) = \frac{m}{f(m)} f(\frac{m}{f(m)}) \geq \varepsilon m$.
Damit ist wegen 3.18 gezeigt, daß $I \neq \{0\}$, da man nach [16], 3.5., (oder 3.23 dieser Arbeit) eine Funktion $F \neq 0$ finden kann mit $\{z_m \mid m \in \mathbb{N}\} \subset V(F)$.
Angenommen, I sei ein Hauptideal, dann gäbe es ein $F \in I$ mit $V(F) = \{z_m \mid m \in \mathbb{N}\}$. Nach 3.18 impliziert dies

(2) $s(r_1,k) - s(r_2,k) \leq B\left(\frac{p(r_1)}{r_1^k} + \frac{p(r_2)}{r_2^k}\right)$ für alle $r_1, r_2 > 0$ und geeignetes B.

Sei $r_1 = z_M$, $r_2 = z_m$, $M>m$ und m hinreichend groß:

$$s(r_1,k) - s(r_2,k) = \frac{1}{k} \sum_{j=m+1}^{M} \frac{f(j)}{j} \geq \frac{1}{k} \int_{m+1}^{M} \frac{f(t)}{t}\, dt$$

(i) $$\geq \frac{1}{k} \int_{m+1}^{M} f'(t) \ln f(t)\, dt = \frac{1}{k} f(t) \ln f(t) \Big|_{m+1}^{M} - \frac{1}{k} \int_{m+1}^{M} f(t) \frac{f'(t)}{f(t)}\, dt$$

$$= \frac{1}{k} \left(f(M) \ln f(M) - f(m+1) \ln f(m+1) - f(M) + f(m+1)\right).$$

Andererseits gilt aber
$\frac{p(r_1)}{r_1^k} + \frac{p(r_2)}{r_2^k} = f(\frac{M}{f(M)}) + f(\frac{m}{f(m)}) \leq f(M) + f(m)$.
Wegen $\ln f(M) \to \infty$ stehen diese Abschätzungen im Widerspruch zu (2).

3.21 Bemerkung und Beispiele:

(1) Theorem 3.18 ist eine Verallgemeinerung eines Theorems von Lindelöf (s. [2], 2.11.1), welches aussagt, daß für $p(r) = r^m$, $m \in \mathbb{N}$, die Folge $(z_n)_n$ genau dann Nullstellenmenge einer Funktion $f \in A_p$ ist, wenn $n(r) = O(r^m)$ gilt und $s(r,m)$ beschränkt ist.

(2) Es ist wohlbekannt (s. [2],2.10.1 und 2.9.5), daß für $p(r) = r^t, t>0$, genau dann alle abgeschlossenen Ideale in A_p Hauptideale sind, wenn $t \notin \mathbb{N}$ gilt.

(3) Für folgende Gewichtsfunktionen p sind alle abgeschlossenen Ideale in A_p Hauptideale:
$p(z) = (\ln(1+|z|^2))^s (\ln \ln(3+|z|^2))^a$, $s>1$, $a \in \mathbb{R}$,

$p(z) = \exp(\beta(\ln(1+|z|^2))^\alpha)$, $0<\alpha<1$, $\beta>0$.

(4) Sei $k \in \mathbb{N}$ und f eine der folgenden Funktionen:
$f(r) = (\ln(1+r^2))^a$, $a \geq -1$,

$f(r) = \exp(\beta(\ln(1+r^2))^\alpha)$, $0<\alpha<\frac{1}{2}$ und $\beta>0$
oder $\alpha=\frac{1}{2}$ und $\beta<\sqrt{2k}$

$f(r) = (\ln \ln(3+r^2))^a$, $a \in \mathbb{R}$,
und sei $p(z) = |z|^k f(|z|)$.
Dann enthält A_p abgeschlossene Ideale, die keine Hauptideale sind.

3.22 Vereinbarung:
Im folgenden sei p eine Gewichtsfunktion mit
$p(2r) \leq 2^{k_0-1} p(r) + C$ wobei $k_0 \in \mathbb{N}$ und $C>0$. $I \neq \{0\}$ sei ein fest gewähltes abgeschlossenes Ideal in A_p mit $V(I) = (z_n)_n$. Da $f \longmapsto f(.+w)$ für festes $w \in \mathbb{C}$ ein Automorphismus von A_p ist, können wir o.B.d.A. $0 \notin V(I)$ annehmen.
Weiter vereinbaren wir, daß $|z_n|$ monoton wächst und daß mit ω_j, $0 \leq j \leq k_0+1$, die (k_0+2)-ten Einheitswurzeln $\omega_j = \exp(\frac{2\pi i}{k_0+2} j)$ bezeichnet werden.

3.23 Lemma:
Es gibt ein $F \in A_p$ *mit* $V(F) = (\omega_j z_n)_{n \in \mathbb{N}, 0 \leq j \leq k_0+1}$, *und* $F(0)=1$.
Bew: Nach Voraussetzung existiert ein $f \in I$ mit $f \neq 0$. Aus der Jensen-Formel [2],1.2.1, folgt $N_f(r) \leq Ap(r)$, also gilt für die Folge $(\omega_j z_n)_{n,j}$ die Beziehung $N(r) \leq (k_0+2)\, Ap(r)$, d. h. (1) von 3.18 ist für sie erfüllt.

Für alle m gilt $\sum_{j=0}^{k_0+1} \omega_j^m = \omega_1^m \sum_{j=0}^{k_0+1} \omega_j^m$, also für $1 \leq m \leq k_0+1$: $\sum_{j=0}^{k_0+1} (\omega_j z_n)^m = 0$. Daher ist 3.18(2) mit $\alpha_j = 0$ für alle $j \leq k_0$ erfüllt.

Das zweite erzeugende Element $G \in I$ wird mittels 3.18 zu einer Nullstellenmenge der Form
$V(G) = (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \cup (y_{nj})_{n\in\mathbb{N},\, j=1,\ldots,k_0+1}$ gewählt.
Hierbei liegen die y_{nj} in der Nähe der $\omega_j z_n$, allerdings außerhalb von gewissen Kreisen um diese Punkte.
Die y_{nj} werden so gewählt, daß

$$\sum_{n=1}^{N} z_n^{-m} + \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=1}^{k_0+1} y_{nj}^{-m} = 0 \text{ für alle } N \in \mathbb{N} \text{ und } m=1,\ldots,k_0$$

gilt. Daß dies möglich ist, zeigt das folgende Lemma.

3.24 Lemma:
Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig, dann existiert ein $C_0 > 0$, so daß für alle $0<C<C_0$ mit einem geeigneten $D \in (0,1)$ folgendes gilt:
Für jedes $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, jedes $n \in \mathbb{N}$, alle Wahlen $\rho_j > 0$, $j=1,\ldots,n$, mit $\sum_{j=1}^{n} \rho_j^2 \leq (D|z|)^2$ und alle Wahlen $z_j \in \mathbb{C}$, $j=1,\ldots,n$, existieren $a_1,\ldots,a_{k+1} \in \mathbb{C}$ mit:

(i) $|a_\nu| < C|z|$, $\nu=1,\ldots,k+1$

(ii) $\frac{1}{z^m} + \sum_{\nu=1}^{k+1} \left(\frac{1}{\omega_\nu (z+a_\nu)}\right)^m = 0$, $m=1,\ldots,k$

(iii) $\omega_\nu (z+a_\nu) \notin \bigcup_{j=1}^{n} U_{\rho_j}(z_j)$, $\nu=1,\ldots,k+1$.

Bew: Das Lemma wird zuerst für $z=1$ bewiesen, und zwar durch Anwendung des Satzes über implizite Funktionen auf die Abbildung $F: \mathbb{C}^{k+1} \supset U_1(0) \longrightarrow \mathbb{C}^k$,

$$F(a_1,\ldots,a_{k+1}) = \left(1 + \sum_{\nu=1}^{k+1} \left(\frac{1}{\omega_\nu (1+a_\nu)}\right)^m\right)_{m=1,\ldots,k} .$$

Es ist $(J_F(a_1,\ldots,a_{k+1}))_{m,\nu} = -m\, \omega_\nu^{-m}\, (1+a_\nu)^{-m-1}$,

also für $l=1,\ldots,k+1$:

$\det((J_F(0)_{m,\nu})_{1\leq m\leq k,\nu\neq l}) = (-m)^k(\det((\omega_\nu^{-m})_{1\leq m\leq k,\nu\neq l})) \neq 0$,

da Vandermonde-Determinante.

Wegen $F(0)=0$ folgt aus dem Satz über implizite Funktionen die Existenz beschränkter Umgebungen V_l von $0\in\mathbb{C}$ und von Abbildungen $g_{1j}: V_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ mit

$F(g_{11}(x),g_{12}(x),\ldots,g_{1,l-1}(x),x,g_{1,l+1}(x),\ldots,g_{1,k+1}(x))=0$.

Wähle C_0 mit $\overline{U_{C_0}(0)}\subset V_1$ und $g_{1j}(U_{C_0}(0))\subset \frac{1}{2}V_j$ für $j>1$.

Zu $C<C_0$ wähle

$$D^2 = (1 + \sup_{l=2}^{k+1} \sup_{x\in\frac{1}{2}V_1} |g'_{11}(x)|k)^{-1} \frac{C^2}{2}.$$

Setze $K_j^{(\nu)} = \omega_\nu^{-1} U_{\rho_j}(z_j) - 1$, $j=1,\ldots,n$, $\nu=1,\ldots,k+1$,

Dann ist zu zeigen, daß die Kurve $Q=\{(z,g_1(z))\,|\,z\in\overline{U_C(0)}\}$ einen Punkt in $\prod_{\nu=1}^{k+1}(\mathbb{C}\setminus\bigcup_{j=1}^{n} K_j^{(\nu)})$ enthält.

Angenommen, die Behauptung sei falsch, dann gilt:

$$(*)\qquad Q\subset \bigcup_{\nu=1}^{k+1}\bigcup_{j=1}^{n} \mathbb{C}^{\nu-1}\times K_j^{(\nu)}\times\mathbb{C}^{k-\nu+1},$$

d. h. für alle $z\in U_C(0)$ gilt

(α) es gibt ein $j\leq n$ mit $z\in K_j^{(1)}$ oder

(β) es gibt $j\leq n$, $1<\nu\leq k+1$ mit $g_{1\nu}(z)\in K_j^{(\nu)}$.

Im Fall (β) gilt nach Wahl von C $g_{1\nu}(z)\in\frac{1}{2}V_\nu$, man kann also g_ν darauf anwenden und erhält:

$(g_{\nu1}\cdot g_{1\nu}(z),g_{\nu2}\cdot g_{1\nu}(z),\ldots,g_{1\nu}(z),\ldots,g_{\nu,k+1}\cdot g_{1\nu}(z)) = (z,g_1(z))$,

die Gleichheit folgt hierbei aus der Eindeutigkeit von g_1, denn beide Vektoren erfüllen $F(x)=0$ und stimmen an der ν-ten Stelle überein.

Also $g_{\nu1}\cdot g_{1\nu}(z)=z$, d. h. $z\in g_{\nu1}(\frac{1}{2}V_\nu\cap K_j^{(\nu)})$.

Aus (*) folgt also

$$U_C(0)\subset \bigcup_{j=1}^{n} K_j^{(1)} \cup \bigcup_{\nu=2}^{k+1}\bigcup_{j=1}^{n} g_{\nu1}(K_j^{(\nu)}\cap\tfrac{1}{2}V_\nu).$$

Das Lebesgue-Maß der Menge auf der rechten Seite ist aber nicht größer als

$$\sum_{j=1}^{n}\pi\rho_j^2 + \sup_{\nu=2}^{k+1}\sup_{x\in\frac{1}{2}V_\nu}|g'_{\nu1}(x)|k \sum_{j=1}^{n}\pi\rho_j^2 \leq \frac{\pi}{2}C^2$$

im Widerspruch zu $m_2(U_C(0)) = \pi C^2$.
Hat man nun ein allgemeines $z \in \mathbb{C}$, so wendet man den Fall $z=1$ an auf $\tilde{\rho}_j = \frac{\rho_j}{|z|}$, $\tilde{z}_j = \frac{z_j}{z}$, gewinnt damit $\tilde{a}_j$ und setzt $a_j = z\,\tilde{a}_j$.

Diejenigen Zusammenhangskomponenten von $S(G;\varepsilon,C)$, die ein Element aus $V(G)\setminus V(I)$ enthalten, sollen disjunkt zu $S(F;\varepsilon,C)$ sein. Die Gestalt der Ausnahmemenge $S(G;\varepsilon,C)$ wird durch das Boutroux-Cartan-Lemma beschrieben. Es ist daher notwendig, bei der Wahl der Nullstellen y_{nj} von G die Konstruktionsmethode aus dem Beweis dieses Lemmas im Auge zu behalten. Um dies korrekt durchführen zu können, werden einige Begriffe eingeführt:

3.25 Definition:
Es seien $z_1,\ldots,z_n \in \mathbb{C}$ nicht notwendig paarweise verschiedene Punkte, und es sei $R>0$.
a) $1 \leq n$ sei eine natürliche Zahl, $B_1,\ldots,B_l \subset \mathbb{C}$ seien abgeschlossene Kreischeiben, $I_1,\ldots,I_l$ sei eine Partition von $\{1,\ldots,n\}$ mit $|I_1| \leq |I_2| \leq \ldots \leq |I_l|$. Sei $\mathcal{B}=(B_1,\ldots,B_l)$, $\mathcal{I}=(I_1,\ldots,I_l)$. Das Paar $(\mathcal{B},\mathcal{I})$ heißt den Punkten $z_1,\ldots,z_n$ zugeordnete Kreiszerlegung zur Radiensumme R, falls gilt:
(i) aus $j \in I_k$ folgt $z_j \in B_k$
(ii) der Radius von B_k ist gleich $|I_k|\frac{R}{n}$.

b) Ist $(\mathcal{B}',\mathcal{I}')$ eine weitere zugeordnete Kreiszerlegung, so gilt $(\mathcal{B},\mathcal{I}) > (\mathcal{B}',\mathcal{I}')$, falls ein k existiert mit:
$|I_j| = |I'_j|$ für $j<k$ und $|I_k| > |I'_k|$.

c) Ist $(\mathcal{B},\mathcal{I})$ ein im Sinne dieser Ordnung maximales Element und ist für $1 \leq i \leq l$ C_i der zu B_i konzentrische Kreis mit doppeltem Radius und $\mathcal{C}=(C_1,\ldots,C_l)$, so bezeichnen wir $(\mathcal{C},\mathcal{I})$ als BC-Zerlegung zu $z_1,\ldots,z_n$ zur Radiensumme 2R.

d) Ist $(\mathcal{C},\mathcal{I})$ eine BC-Zerlegung, so bezeichnet man für $i \in I_j$ $|I_j|$ als Rang von z_i.

Bemerkung:
Falls z_i mehrfach auftritt, so folgt für eine BC-Zerlegung (C,I) aus der Maximalität, daß alle Indices j mit $z_i=z_j$ in demselben I_k liegen. Daher ist der Rang auch bei mehrfachen Nullstellen wohlbestimmt.

3.26 Boutroux-Cartan-Lemma (s. [2], 3.4.1)
Mit den Bezeichnungen aus 3.25 gilt für alle $z\in\mathbb{C}\setminus\bigcup_{j=1}^{l} C_j$:

$$\prod_{j=1}^{n} |z - z_j| > \left(\frac{R}{e}\right)^n .$$

Bew: Sei $z\in\mathbb{C}\setminus\bigcup C_j$ und $\lambda\leq n$. Für $j\leq n$ und $i\in I_j$ gilt nach Konstruktion von C_j: $|z - z_i| > \frac{R}{n}$ Rang z_i, d.h. in $\overline{U}_{\lambda\frac{R}{n}}(z)$ liegen nur z_i mit Rang $z_i < \lambda$.
Wir zeigen nun: Für alle $\lambda\leq n$ gilt:
(1) $\quad |\{i\,|\,|z_i - z| \leq \frac{R}{n}\lambda\}| \leq \lambda - 1.$
Angenommen, die Zwischenbehauptung sei falsch, dann gibt es ein λ, für das (1) nicht gilt:
Sei dann k der kleinste Index mit $|I_k| < \lambda$ (wenn ein solcher nicht existiert, gilt $\overline{U}_{\lambda\frac{R}{n}}(z)\cap\{z_1,\ldots,z_n\}=\emptyset$).
Setzt man $I'_j=I_j$ für $j<k$, wählt I'_k als λ-elementige Teilmenge von $\{i\,|\,|z_i - z| \leq \lambda\frac{R}{n}\}$ und für $j>k$ I'_j als einelementen-Teilmenge von $\{1,\ldots,n\}\setminus\bigcup_{\nu<j} I'$, $B'_j=B_j$ für $j<k$, $B'_k=\overline{U}_{\lambda\frac{R}{n}}(z)$ und für $j>k$ $B'_j=\overline{U}_{\frac{R}{n}}(z_\nu)$ falls $I'_j=\{z_\nu\}$, so ist (B',I') eine Kreiszerlegung mit $(B',I') > (B,I)$.
Da dies im Widerspruch zur Maximalität von (B,I) steht, ist die Zwischenbehauptung richtig.
Ordnet man nun die z_j nach ihrem Abstand zu z, so gilt daher $|z - z_j| > j\frac{R}{n}$. Daraus folgt

$$\Pi|z - z_j| > n!\left(\frac{R}{n}\right)^n > \left(\frac{R}{e}\right)^n, \text{ da } n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n .$$

3.27 Lemma:

$C_1,\dots,C_l$ *seien BC-Kreise zu* $z_1,\dots,z_n\in\mathbb{C}$ *mit Radiensumme* $2R$, *ferner seien* $z_{n+1},\dots,z_{n+k}\in\mathbb{C}\setminus\bigcup_{i=1}^{l} C_i$ *mit* $|z_{n+i}-z_{n+j}|>\frac{R}{2}$ *für* $i\neq j$. *Sind* $C'_1,\dots,C'_m$ *BC-Kreise zur Radiensumme* $2R'<\frac{R}{2}$, *so ist für* $j=1,\dots,k$ *der Rang von* z_{n+j} *in diesem System gleich* 1.

Bew: Wenn nicht anders vermerkt, beziehen sich Ränge im folgenden immer auf das ungestrichene System.

Sei $j=1,\dots,k$ beliebig und λ der gestrichene Rang von z_{n+j}. Als Widerspruchsannahme sei $\lambda\geq 2$ angenommen.

Nach Definition des Ranges existiert ein Kreis B mit Radius $\lambda\frac{R'}{n+k}\leq\lambda\frac{R}{4(n+k)}$, der z_{n+j} sowie $\lambda-1$ weitere Elemente von $\{z_1,\dots,z_{n+k}\}$ enthält. Der Durchmesser von B ist gleich $2\frac{\lambda}{n+k}R'\leq\frac{R}{2}$, aber $|z_{n+j}-z_{n+i}|>\frac{R}{2}$ für $i\neq j$, also enthält B außer z_{n+j} nur noch Elemente $z_{i_1},\dots,z_{i_{\lambda-1}}$ mit $i_\nu\leq n$.

Beh: Es gibt ein ν mit $\mathrm{Rang}(z_{i_\nu})\geq\lambda-1$.

Bew: Angenommen, alle z_{i_ν} haben einen Rang, der echt kleiner als $\lambda-1$ ist. Dann erhält man eine in der Ordnung aus 3.25 größere Kreiszerlegung auf die folgende Weise:

Sei μ der Index mit $|I_\mu|\geq\lambda-1$, $|I_{\mu+1}|<\lambda-1$, dann setze $\tilde{I}_\nu=I_\nu$ für $\nu\leq\mu$, $\tilde{I}_{\mu+1}=\{i_1,\dots,i_{\lambda-1}\}$, $\tilde{I}_\nu$ einelementig für $\nu>\mu+1$. Dann gibt es eine den $z_1,\dots,z_n$ zugeordnete Kreiszerlegung mit Radiensumme R mit der Partition $(\tilde{I}_\nu)$, denn der Radius von B ist $\lambda\frac{R'}{n+k}$, das ist weniger als der für $B_{\mu+1}$ zulässige Radius $(\lambda-1)\frac{R}{n}$, denn $(\lambda-1)\frac{R}{n}\geq\frac{\lambda}{2}\frac{R}{n}\geq\lambda\frac{R'}{n+k}$.

Da dies der Maximalität widerspricht, ist die Annahme falsch, die Zwischenbehauptung also bewiesen.

O.B.d.A. sei der Rang von z_{i_1} größer oder gleich $\lambda-1$.

Dann gilt wegen $z_{n+j}\in\mathbb{C}\setminus C_{i_1}$: $|z_{n+j}-z_{i_1}|>(\lambda-1)\frac{R}{n}$.

Andererseits folgt aus $z_{n+j},z_{i_1}\in B$ aber $|z_{n+j}-z_{i_1}|\leq 2\lambda\frac{R'}{n+k}\leq\frac{\lambda}{2}\frac{R}{n+k}$, also $(\lambda-1)\frac{R}{n}<\frac{\lambda}{2}\frac{R}{n+k}$. Dies widerspricht der Annahme $\lambda\geq 2$.

3.28 Lemma:

Unter den Voraussetzungen von 3.22 existieren paarweise verschiedene Punkte y_{ij}, $i\in\mathbb{N}$, $j\in\{1,\dots,k_0+1\}$, *mit:*

(α) $n_y(r) = O(n_z(r))$

(β) *Für* $1\leqq\kappa\leqq k_0$ *gilt:* $|s_z(r,\kappa) + s_y(r,\kappa)|r^\kappa = O(p(r))$

(γ) *Es gibt* $c>0$, *so daß für alle* $n\in\mathbb{Z}$ *und alle* $z\in\mathbb{C}$ *mit* $|z|\in[2^{n-1},2^n]$ *mit* $m(r) = |\{i||z_i|<r\}|$ *gilt:*

Falls $\prod_{i=1}^{m(2^{n+4})} \prod_{j=1}^{k_0+1} |z - y_{ij}| \leqq (c\,2^n)^{m(2^{n+4})(k+1)}$,

so folgt für $j=0,\dots,k+1$:

$$\prod_{i=1}^{m(2^{n+4})} |z - \omega_j z_i| > (c\,2^n)^{m(2^{n+4})}.$$

Bew: Es gelten die Vereinbarungen aus 3.22, F sei wie in 3.23, $k=k_0$.

Sei C_0 wie in 3.24 und sei $C\in(0, \min(\frac{1}{4}, C_0))$ so klein, daß $\operatorname{dist}(U_C(\omega_j),U_C(\omega_\nu)) \geqq \frac{\pi}{k+2}$ für $\nu\neq j$, $1\leqq\nu,j\leqq k+1$. Sei D die gemäß 3.24 zu C existierende Konstante, sei $\eta = \frac{D^2}{6k+16}$, und für $n\in\mathbb{Z}$ sei $R_n = 2^n$. Schließlich existiert ein $C'>0$ mit $|F(z)| \leqq e^{C'p(z)}$ für alle $z\in\mathbb{C}$.

Man bilde BC-Kreise zu $\{z_i||z_i|<R_{n+2}\}$ mit Radiensumme $2\eta R_n$ und bezeichne sie mit $K_m^{(n)}$, $m=1,\dots,M_n$.

Die y_{ij} werden wie folgt rekursiv ausgewählt:

Seien $y_{\nu j}$, $j=1,\dots,k+1$, $\nu<i$, bereits bestimmt (für $i=1$ ist noch nichts bestimmt). Da o.B.d.A. $0\notin V(I)$ angenommen worden war, existiert $n\in\mathbb{Z}$ mit $R_{n-1}\leqq|z_i|<R_n$.

Seien nun $D_\lambda^{(i)}$, $\lambda=1,\dots,\Lambda_i$, BC-Kreise zu $\{y_{\nu j}|j=1,\dots,k+1,\ \nu=1,\dots,i-1\}$ mit Radiensumme $2\eta R_n$.

Es soll nun Lemma 3.24 angewandt werden auf

$$\{U_{\rho_\nu}(\xi_\nu)\} := \{\omega_j K_m^{(n)} + \overline{U_{\frac{R_n}{\eta m(R_{n+2})}}(0)} \,|\, 0\leqq j\leqq k+1, m\leqq M_n\} \cup \{D_\lambda^{(i)} \,|\, \lambda\leqq\Lambda_i\}.$$

Es gilt $\sum\rho_\nu \leqq (k+2)2\eta R_n + (k+2)M_n\eta\frac{R_n}{m(R_{n+2})} + 2\eta R_n \leqq (3k+8)\eta R_n = (6k+16)\eta R_{n-1} \leqq (6k+16)\eta|z_i|$, denn $M_n \leqq m(R_{n+2})$.

Nach Wahl von η folgt $\sum\frac{\rho_\nu}{|z_i|} < D^2 \leqq 1$ und daher auch $\sum\left(\frac{\rho_\nu}{|z_i|}\right)^2 < D^2$. Also existieren nach 3.24 Zahlen $a_1,\dots,a_{k+1}$

mit

$$|a_j| < C|z_i|,$$

$$(1)\quad \frac{1}{z_i^{\kappa}} + \sum_{j=1}^{k+1}\left(\frac{1}{\omega_j(z_i+a_j)}\right)^{\kappa} = 0,\ 1\leq\kappa\leq k,$$

$$\omega_j(z_i+a_j) \notin \bigcup_{\mu=0}^{k+1}\bigcup_{m=1}^{M_n}(\omega_\mu K_m^{(n)} + U_{\frac{\eta R_n}{m(R_{n+2})}}(0)) \cup \bigcup_{\lambda=1}^{\Lambda_i} D_\lambda^{(i)}.$$

Setze nun $y_{ij} = \omega_j(z_i + a_j)$.

(α) folgt dann aus $|a_j| < \frac{1}{4}|z_i|$, also $\frac{3}{4}|z_i| < |y_{ij}| < \frac{5}{4}|z_i|$.

Zum Beweis von (β) sei $r>0$ fest gewählt, dann existiert $n\in\mathbb{Z}$ mit $R_{n-1}\leq r<R_n$.

Sei $I(r) = \{(i,j)\,|\,i\geq m(R_{n-2}),\ 1\leq j\leq k+1,\ |y_{ij}| \leq r\}$.

Für alle i mit $|z_i|<R_{n-2}$ gilt $|y_{ij}| \leq \frac{5}{4}|z_i| \leq \frac{5}{4}R_{n-2} < R_{n-1}$,

also $\kappa|s_z(r,\kappa) + s_y(r,\kappa)| = \sum_{i=1}^{n_z(r)} z_i^{-\kappa} + \sum_{|y_{ij}|\leq r} y_{ij}^{-\kappa} \overset{(1)}{=}$

$\sum_{i=m(R_{n-2})}^{n_z(r)} z_i^{-\kappa} + \sum_{(i,j)\in I(r)} y_{ij}^{-\kappa}$.

Die Anzahl der Summanden wird mit der Jensen-Formel abgeschätzt durch

$(k+2)n_z(2r) \leq \ln M_F(e^2 r) \leq C' p(e^2 r) \leq C'' p(r)$.

Die Beträge der verbliebenen Summanden sind kleiner als

$\left(\frac{3}{4} R_{n-2}\right)^{-\kappa} = \left(\frac{16}{3}\right)^{\kappa} R_n^{-\kappa} \leq 6^k r^{-\kappa}$, daraus folgt

$|s_z(r,\kappa) + s_y(r,\kappa)|r^{\kappa} \leq 6^k C'' p(r)$.

Es soll nun (γ) gezeigt werden:

Sei dazu $n\in\mathbb{Z}$ fest gewählt, C_l, $l=1,\ldots,m$, seien BC-Kreise zu $\{y_{ij}\,|\,i\leq m(R_{n+4}),\ 1\leq j\leq k+1\}$ mit Radiensumme $\frac{1}{8}\eta R_n$. Dann wird zunächst gezeigt:

(2) Alle y_{ij} mit $|y_{ij}|\geq R_{n-2}$ und $i\leq m(R_{n+4})$ haben Rang 1.

Angenommen, die Behauptung sei falsch, dann existiert $i_0 = \max\{i\leq m(R_{n+4})\,|\,\mathrm{Rang}(y_{ij_0})>1 \text{ für ein } j_0\}$ mit $|y_{i_0 j_0}| \geq R_{n-2}$.

Ferner existiert $\nu\in\{n-2,\ldots,n+4\}$ mit $|z_{i_0}|\in[R_{\nu-1}, R_\nu)$.

Nach Konstruktion gilt für alle j:

$$y_{i_0 j} \notin \bigcup_{\lambda=1}^{\Lambda_{i_0}} D_\lambda^{(i_0)}.$$

Die Radiensumme der C_l ist gleich $\frac{1}{8}\eta R_n \leq \frac{1}{2}\eta R_\nu$, außerdem gilt für $j \neq \nu$ nach Wahl von C

$|y_{i_0 j} - y_{i_0 \nu}| > \frac{\pi}{k+2}\,|z_{i_0}| \geq \frac{\pi}{k+2}\,R_{\nu-1} \geq \frac{1}{2}\eta R_\nu$.

Man wendet nun Lemma 3.27 an, wobei die $D_\lambda^{(i_0)}$, $\lambda=1,\ldots,\Lambda_{i_0}$, das ungestrichene System bilden (mit Radiensumme $2\eta R_\nu$) und $\{C_l \mid y_{ij} \in I_l$ für ein $i \leq i_0$, $j=1,\ldots,k+1\}$ das gestrichene. (Da für $i>i_0$ $\mathrm{Rang}(y_{ij})=1$ nach Wahl von i_0, können diese y_{ij} mit ihren Kreisen C_l weggelassen werden, man erhält dann eine BC-Zerlegung zu y_{ij}, $i \leq i_0$, $j=1,\ldots,k+1$, mit eventuell kleinerer Radiensumme.)

Aus Lemma 3.27 folgt $\mathrm{Rang}(y_{i_0 j_0})=1$ im gestrichenen System im Widerspruch zur Annahme.

Es sei $|z| \in [R_{n-1}, R_n]$ und es gelte $|z - y_{ij}| > \frac{\eta R_n}{8(k+1)m(R_{n+4})}$ für alle i,j mit $|y_{ij}| \geq R_{n-2}$ und $i \leq m(R_{n+4})$.

Für $|y_{ij}| \geq R_{n-2}$ gilt nach (2) $\mathrm{Rang}(y_{ij}) = 1$, also hat der zu y_{ij} gehörende BC-Kreis den Radius $\frac{\eta R_n}{8(k+1)m(R_{n+4})}$ und o.B.d.A. y_{ij} als Mittelpunkt. Für $|y_{ij}| < R_{n-2}$ ist der Abstand $|z - y_{ij}|$ größer als die gesamte Radiensumme der BC-Kreise $C_1,\ldots,C_m$.

Daher gilt $z \notin \cup C_l$, aus dem Boutroux-Cartan-Lemma 3.26 folgt dann:

$$\prod_{i=1}^{m(R_{n+4})} \prod_{j=1}^{k+1} |z - y_{ij}| > \left(\frac{\eta R_n}{16e}\right)^{(k+1)m(R_{n+4})}$$

Ist nun $|z| \in [R_{n-1}, R_n]$ gegeben mit

$$\prod_{i=1}^{m(R_{n+4})} \prod_{j=1}^{k+1} |z - y_{ij}| \leq \left(\frac{\eta R_n}{16e}\right)^{(k+1)m(R_{n+4})},$$

so gilt folglich $|z - y_{i_0 j_0}| \leq \frac{\eta R_n}{8(k+1)m(R_{n+4})}$ für geeignete i_0, j_0. Sei $\nu \in \{n-1, n, n+1\}$ mit $|z_{i_0}| \in [R_{\nu-1}, R_\nu)$. Nach Konstruktion der y_{ij} gilt:

$$y_{i_0 j_0} \notin \bigcup_{j=0}^{k+1} \bigcup_{\mu=1}^{M_\nu} (\omega_j K_\mu^{(\nu)} + \overline{U_{\frac{\eta R_\nu}{m(R_{\nu+2})}}(0)}).$$

Wegen $\frac{\eta R_n}{8(k+1)m(R_{n+4})} \leq \frac{\eta R_\nu}{m(R_{\nu+2})}$ (da $R_n \leq 2R_\nu$ und $R_{n+4} \geq R_{\nu+2}$)

folgt daraus $z \notin \bigcup_{j=0}^{k+1} \bigcup_{\mu=1}^{M_\nu} \omega_j K_\mu^{(\nu)}$. Anwendung des Boutroux-Cartan-Lemmas hierauf ergibt für $j=1,\ldots,k+1$

$$\prod_{i=1}^{m(R_{\nu+2})} |z - \omega_j z_i| > \left(\frac{\eta R_\nu}{e}\right)^{m(R_{\nu+2})}.$$

Es ist $|z| \leq R_n \leq R_{\nu+1}$, also für $i>m(R_{\nu+2})$: $|z - \omega_j z_i| \geq \frac{\eta R_\nu}{e}$, daher gilt auch

$$\prod_{i=1}^{m(R_{n+4})} |z - \omega_j z_i| > \left(\frac{\eta R_\nu}{e}\right)^{m(R_{n+4})} \geq \left(\frac{\eta R_n}{2e}\right)^{m(R_{n+4})}.$$

Damit ist (γ) für $c = \frac{\eta}{16e}$ gezeigt.

3.29 Satz:

Unter den Voraussetzungen von 3.28 existiert ein $G \in A_p$ *mit:*

(α) $V(G) = \{z_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{y_{ij} \mid i \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq k+1\}$

(β) *Es gibt* $\varepsilon, C > 0$, *so daß alle Zusammenhangskomponenten von* $S(G;\varepsilon,C)$, *die eines der* y_{ij} *enthalten, disjunkt zu* $S(F;\varepsilon,C)$ *sind.*

Bew: Wegen 3.18 existiert ein $G \in A_p$ mit (α). O.B.d.A. wird $G(0)=1$ angenommen.

(β) folgt für dieses G aus 3.28(γ) mit der folgenden Variante des Beweises des Minimum-Modulus-Theorems ([2],3.7.4): Man zeigt zunächst, daß es zu c aus 3.28 Konstanten ε und C gibt, so daß für alle $n \in \mathbb{Z}$ und alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \in [R_{n-1}, R_n]$ gilt:

(a) Gilt $\prod_{i=1}^{m(2^{n+4})} \prod_{j=1}^{k+1} |z - y_{ij}| \geq (c\, 2^n)^{(k+1)m(2^{n+4})}$

und $\prod_{i=1}^{m(2^{n+4})} |z - z_i| \geq (c\, 2^n)^{m(2^{n+4})}$,

so folgt $|G(z)| \geq \varepsilon e^{-Cp(z)}$.

(b) Gilt für $0 \leq j \leq k+1$: $\prod_{i=1}^{m(2^{n+4})} |z - \omega_j z_i| \geq (c\, 2^n)^{m(2^{n+4})}$,

so folgt $|F(z)| \geq \varepsilon e^{-Cp(z)}$.

Die Beweise von (a) und (b) sind ähnlich, es wird daher nur (a) gezeigt.

Setze $M=m(2^{n+4})$ und

$$\phi_1(z) = R_{n+5}^{(k+1)M} \prod_{l=1}^{M} \prod_{j=1}^{k+1} \frac{R_{n+5}(z - y_{lj})}{y_{lj}(R_{n+5}^2 - \bar{y}_{lj} z)} ,$$

$$\phi_2(z) = R_{n+5}^{M} \prod_{l=1}^{M} \frac{R_{n+5}(z - z_l)}{z_l(R_{n+5}^2 - \bar{z}_l z)} .$$

$$|\phi_1(R_{n+5}\, e^{it})| = R_{n+5}^{(k+1)M} \prod_{l,j} |y_{lj}^{-1}| \left| \frac{R_{n+5}\, e^{it} - y_{lj}}{R_{n+5}\, e^{-it} - \bar{y}_{lj}} \right| =$$

$$R_{n+5}^{(k+1)M} \prod_{l,j} |y_{lj}|^{-1} \geq 1.$$

Analog zeigt man $|\phi_2(R_{n+5}\, e^{it})| \geq 1$.

$\phi := \phi_1\phi_2$ ist holomorph auf $\overline{U_{R_{n+5}}(0)}$ und $|\phi(0)| = 1$.

$\psi\colon z \longmapsto \frac{G(z)}{\phi(z)}$ ist holomorph auf $\overline{U_{R_{n+5}}(0)}$ und hat keine Nullstellen in $U_{R_{n+3}}(0)$, ferner gilt $|\psi(0)|=1$, da $G(0)=1$.

Daher folgt aus [2],1.3.2, für $|z| \leq R_n$:

$$\ln|\psi(z)| \geq - \frac{2R_n}{R_{n+3} - R_n} \ln M_\psi(R_{n+3}) = - \frac{2}{7} \ln M_\psi(R_{n+3}) \geq$$

$$- \frac{2}{7} \ln M_\psi(R_{n+5}) \geq - \frac{2}{7} \ln M_G(R_{n+5}),$$

da $\psi(z) \leq G(z)$ für alle z mit $|z| = R_{n+5}$.

Für $|z| \leq R_{n+5}$ gilt $\prod_{l,j} |R_{n+5}^2 - \bar{y}_{lj} z| < (2R_{n+5}^2)^{(k+1)M}$.

Unter Verwendung der Voraussetzung von (a) folgt hieraus:

$$|\phi_1(z)| > R_{n+5}^{(k+1)M} \left(\prod_{l,j} |y_{lj}|^{-1}\right) \frac{R_{n+5}^{(k+1)M}}{(2R_{n+5}^2)^{(k+1)M}} (c2^n)^{(k+1)M}$$

$$\geq \left\{\frac{c2^{n-1}}{R_{n+5}}\right\}^{(k+1)M} = \left(\frac{c}{64}\right)^{(k+1)M} ,$$

analog gilt $|\phi_2(z)| \geq \left(\frac{c}{64}\right)^{M}$ und daher $|\phi(z)| \geq \left(\frac{c}{64}\right)^{(k+2)M}$.

Aus der Jensen-Formel folgt:

$(k+2)M \leq n_G(R_{n+5}) \leq \ln M_G(eR_{n+5})$, also, da c klein ist:

$\ln|\phi(z)| > (k+2)M \ln\frac{c}{64} \geq \ln\frac{c}{64} \ln M_G(eR_{n+5})$,

woraus schließlich folgt:

$\ln|G(z)| = \ln|\psi(z)| + \ln|\phi(z)| \geq$
$-\frac{2}{7} \ln M_G(R_{n+5}) + \ln \frac{c}{64} \ln M_G(eR_{n+5}) \geq$
$(-\frac{2}{7} + \ln \frac{c}{64}) \ln M_G(eR_{n+5})$.
Wegen $G(0)=1$ existiert eine Konstante $K>0$ mit
$|G(z)| \leq e^{Kp(z)}$ für alle z.
Ferner gilt $R_{n+5} = 64\, R_{n-1} \leq 64|z|$, also
$\ln|G(z)| \geq (-\frac{2}{7} + \ln \frac{c}{64})\, K\, p(64\, e\, z)$.
Damit ist (a) bewiesen.

Nach 3.28(γ) sind die beiden folgenden Mengen disjunkt:

$$M_1 := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{z\in\mathbb{C} \mid R_{n-1} \leq |z| \leq R_n \text{ und } \prod_{i=1}^{m(2^{n+4})} \prod_{j=1}^{k+1} |z - y_{ij}| \leq (c2^n)^{(k+1)m(2^{n+4})}\},$$

$$M_2 := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{z\in\mathbb{C} \mid R_{n-1} \leq |z| \leq R_n \text{ und } \prod_{i=1}^{m(2^{n+4})} |z - z_i| \leq (c2^n)^{m(2^{n+4})}\}.$$

M_1 und M_2 sind abgeschlossen und disjunkt, für jede zusammenhängende Teilmenge $S \subset M_1 \cup M_2$ gilt folglich $S \subset M_1$ oder $S \subset M_2$.
Wegen a) gilt $S(G;\varepsilon,C) \subset M_1 \cup M_2$, daher gilt für jede Zusammenhangskomponente S von $S(G;\varepsilon,C)$, die eines der y_{ij} enthält: $S \subset M_1$.
Wegen b) und 3.28(γ) gilt aber $S(F;\varepsilon,C) \cap M_1 = \emptyset$.

3.30 Theorem:

Ist p eine Gewichtsfunktion gemäß 3.1, dann wird jedes abgeschlossene Ideal in A_p algebraisch von zwei Elementen erzeugt.

Bew: Es gelten die Bezeichnungen aus 3.22 und 3.29. Sei $f\in I$ beliebig. Die analytische Funktion $\tilde{\lambda}: S(G;\varepsilon,C) \longrightarrow \mathbb{C}$ sei definiert durch $\tilde{\lambda}(z) = \frac{f(z)}{F(z)}$ für z aus denjenigen Zusammenhangskomponenten von $S(G;\varepsilon,C)$, die eines der y_{ij} enthalten, und $\tilde{\lambda}(z) = 0$ für alle anderen $z\in S(G;\varepsilon,C)$.
Im ersten Fall liegt z nicht in $S(F;\varepsilon,C)$, also
$|\frac{1}{F(z)}| \leq \frac{1}{\varepsilon}\, e^{Cp(z)}$.

Die Voraussetzungen des semilokalen Interpolationssatzes 3.15 sind also erfüllt, folglich existieren ein $\lambda \in A_p$ sowie eine analytische Funktion α auf $S(G;\varepsilon_1,C_1)$ mit $\lambda(z) = \tilde{\lambda}(z) + \alpha(z)\, G(z)$ für alle $z \in S(G;\varepsilon_1,C_1)$.
Durch $\mu := \frac{f - \lambda F}{G}$ wird eine ganze Funktion gegeben, welche für alle $z \in \mathbb{C} \setminus S(G;\varepsilon,C)$ $|\mu(z)| \leq A e^{Bp(z)}$ mit geeigneten A,B erfüllt. Aus dem Maximumsprinzip folgt dann $\mu \in A_p$.
$f = \lambda F + \mu G$ ist klar nach Wahl von μ.

3.31 Theorem:
Ist p eine Gewichtsfunktion gemäß 3.1, dann wird jedes abgeschlossene Ideal in A_p^0 algebraisch von zwei Elementen erzeugt.
Bew: Das Ideal I sei nicht das Nullideal. Sei also $V(I) = (z_n)_n$ im Sinne der Vereinbarungen zu Anfang von 3B. Sei $g \neq 0$ eine beliebige Funktion in I. Nach 3.16 existiert eine Gewichtsfunktion q mit $g \in A_q$ und $q(z)=o(p(z))$. Sei I' das Verschwindungsideal von V(I) in A_q (mit Vielfachheiten). Wegen $g \in A_q$ gilt $I' \neq \{0\}$. Es seien F gemäß 3.23 und G gemäß 3.29 zu $I' \subset A_q$ gewählt.
Sei nun $f \in I$ beliebig. Wiederum nach 3.16 existiert eine Gewichtsfunktion q' mit $f \in A_{q'}$ und $q'=o(p(z))$. $s := \max(q,q')$ ist ebenfalls eine Gewichtsfunktion, es gelten $f,F,G \in A_s$ und $S_s(H;\varepsilon,C) \subset S_q(H;\varepsilon,C)$ für H=F,G.
Man setzt nun wieder $\tilde{\lambda}(z) = \frac{f(z)}{F(z)}$ für alle z aus denjenigen Zusammenhangskomponenten von $S_s(G;\varepsilon,C)$, welche eines der y_{ij} enthalten, und $\tilde{\lambda}(z) = 0$ für alle anderen $z \in S_s(G;\varepsilon,C)$.
Im ersten Fall gilt dann $|\frac{1}{F(z)}| \leq \frac{1}{\varepsilon} e^{Cs(z)}$, mit 3.15 existieren also ein $\lambda \in A_s$ und eine analytische Funktion α auf $S_s(G;\varepsilon_1,C_1)$ mit $\lambda(z) = \tilde{\lambda}(z) + \alpha(z)\, G(z)$ für alle $z \in S_s(G;\varepsilon_1,C_1)$. Wie in 3.30 zeigt man, daß $\mu = \frac{f - \lambda F}{G}$ in A_s liegt. Da $A_s \subset A_p^0$, liefert die Beziehung $f = \lambda F + \mu G$ die gewünschte Zerlegung.

C Die topologische Struktur abgeschlossener Ideale

3.32 Theorem:

p sei eine (DN)-Gewichtsfunktion, $I \neq \{0\}$ sei ein abgeschlossenes Ideal in A_p.
Dann gilt $I \simeq A_p$ topologisch.
(Man beachte, daß in 3.1 vereinbart wurde, daß Gewichtsfunktionen radial sind und der Bedingung $p(2t) = O(p(t))$ genügen.)

Bew: Es gelten die Bezeichnungen von 3.22 und 3.29. Man betrachte hilfsweise das Ideal

$$J = \{f \in A_p \mid \forall i \in \mathbb{N}\ \forall j=1,\dots,k+1:\ f(y_{ij}) = 0\}.$$

Nach Theorem 4.7. von Meise [7] (oder wegen 3.30 und 1.12 dieser Arbeit) ist J komplementiert, es existiert also eine stetige Rechtsinverse R zur kanonischen Abbildung $S: A_p \to A_p/J$.
Es wird nun gezeigt, daß durch

$$\Phi: (A_p/J)\times A_p \longrightarrow I,\ \Phi(a,b) = R(a)F + bG,$$

ein topologischer Isomorphismus definiert wird:
Φ ist injektiv: Aus $R(a)F + bG = 0$ folgt $R(a)(y_{ij})F(y_{ij}) = 0$, also wegen $F(y_{ij}) \neq 0$: $R(a) \in J$, d.h. $a = S\,R(a) = 0$.
Φ ist surjektiv: Für λ wie im Beweis von 3.30 setzt man $a = S(\lambda)$, $b = \frac{f - RS(\lambda)F}{G}$. Dann gilt $\Phi(a,b) = f$.
Φ ist stetig, $(A_p/J)\times A_p$ und I sind (LF)-Räume, also ist nach dem Satz von der offenen Abbildung Φ ein Isomorphismus.
Nach 3.6 ist $A_p \simeq \Lambda_\infty(\alpha)$ für eine geeignete Exponentenfolge α. Nach Meise [7], Cor. 3.8., ist A_p/J entweder endlichdimensional oder isomorph zum Dualraum eines Potenzreihenraums von unendlichem Typ. In beiden Fällen ist I_b' isomorph zu $\Lambda_\infty(\beta)$ für ein geeignetes β.
Da I_b' Quotient von $\Lambda_\infty(\alpha)$ ist, folgt $\Delta(I_b') \supset \Delta(\Lambda_\infty(\alpha))$. Ferner ist $\Lambda_\infty(\alpha)_b' \simeq F\,A_p$ ein abgeschlossener Unterraum von I, folglich ist $\Lambda_\infty(\alpha)$ Quotient von I_b', und daher $\Delta(I_b') \subset \Delta(\Lambda_\infty(\alpha))$. Aus $\Delta(\Lambda_\infty(\alpha)) = \Delta(\Lambda_\infty(\beta))$ folgt schließlich $\Lambda_\infty(\alpha) = \Lambda_\infty(\beta)$ (s. [15], 9.3.3., Thm. 2, oder [5], 10.6.11.).

3.33 Beispiele: (s. 3.7 bzw. Meise [7] und Meise und Taylor [10])

(1) Für eine Gewichtsfunktion p mit $p(2z) \geq Cp(z) - C$ für ein geeignetes $C>0$ gilt: Jedes abgeschlossene Ideal $I\neq\{0\}$ in A_p ist isomorph zu $A_p \simeq \Lambda_\infty(j)'_b$.

(2) Für $\rho>0$ ist $p(z)=|z|^\rho$ eine Gewichtsfunktion der unter (1) beschriebenen Art. Die Algebra $A_p =: E_\rho$ besteht aus allen ganzen Funktionen, die entweder die Ordnung ρ und endlichen Typ oder eine echt kleinere Ordnung als ρ besitzen (s. [2], 2.1.).

(3) Weitere (DN)-Gewichtsfunktionen sind für $\alpha\in(0,1)$ die Funktionen

$$p(z) = \exp((\ln(1+|z|^2))^\alpha).$$

3.34 Theorem:

Sei p eine Gewichtsfunktion, für welche A_p isomorph zum Dualraum eines Potenzreihenraums von endlichem Typ ist. $I\neq\{0\}$ sei ein abgeschlossenes Ideal in A_p. Dann gilt $I \simeq A_p$ topologisch.

Bew: I ist Unterraum von A_p, I'_b also isomorph zu einem Quotienten eines Potenzreihenraums von endlichem Typ, d. h. I'_b hat $(\overline{\Omega})$. I ist ferner nach 3.30 Quotient von $A_p \times A_p$, I'_b hat also (DN). Schließlich zeigt man wie bei 3.32: $\Delta(I'_b)=\Delta((A_p)'_b)$. Mit 1.9 folgt daraus die Behauptung.

3.35 Beispiel:

Für $s>1$, $a\in\mathbb{R}$ sei

$$p(z) = (\ln(1+|z|^2))^s (\ln\ln(3+|z|^2))^a,$$

$$\alpha_j = \frac{j^{\frac{s}{s-1}}}{(\ln j)^{\frac{a}{s-1}}}$$

Nach 3.7(4) und 3.34 bzw. 3.21(3) gilt für jedes abgeschlossene Ideal $I\neq\{0\}$ in A_p: $I \simeq A_p \simeq \Lambda_1(\alpha)'_b$.

3.36 Korollar:

Seien $r>1$, $t\in\mathbb{R}$. $W\neq\{0\}$ *sei ein abgeschlossener Vorwärtsshift-invarianter Unterraum von* $\Lambda_1(\mathbb{N}_0, j^r(\ln j)^t)'_b$, *d. h. für die Abbildung*

$$V: \Lambda_1(\mathbb{N}_0, j^r(\ln j)^t)'_b \longrightarrow \Lambda_1(\mathbb{N}_0, j^r(\ln j)^t)'_b$$
$$V((x_j)_{j\in\mathbb{N}_0}) = (x_{j-1})_{j\in\mathbb{N}_0},\ x_{-1}:=0,$$

gelte $V(W)\subset W$.

Dann gilt $W\simeq\Lambda_1(\mathbb{N}, j^r(\ln j)^t)'_b$.

Bew: Für den Isomorphismus T aus 3.7(3) gilt $V\circ T(f) = T(zf)$. $T^{-1}(W)$ ist folglich ein abgeschlossenes Ideal in A_p für p aus 3.35 mit $s=\frac{r}{r-1}$ und $a=\frac{-t}{r-1}$. Daher folgt die Behauptung aus 3.35.

Bemerkung:

Meise, Schwerdtfeger und Taylor haben in [8], Cor. 4.7., die abgeschlossenen echten Rückwärtsshift-invarianten Unterräume von $\Lambda_1(\mathbb{N}_0, j^r)$, $r>1$, untersucht. Diese sind endlichdimensional oder isomorph zu einem Potenzreihenraum unendlichen Typs, also nie isomorph zum Grundraum.
Der Beweis von [8], 4.7., zusammen mit unserem Beispiel 3.7(4) zeigt übrigens, daß dieses Ergebnis auch für $\Lambda_1(\mathbb{N}_0, j^r(\ln j)^t)$ mit $t\neq 0$ gilt.

3.37 Theorem:

p *sei eine Gewichtsfunktion, und es gebe eine Exponentenfolge* α *sowie einen Isomorphismus* $S: A_p^0 \longrightarrow \Lambda_\infty(\alpha)$, *der der Bedingung (Z) aus 3.9 genügt.* $I\neq\{0\}$ *sei ein abgeschlossenes Ideal in* A_p^0.

Dann gilt $I\simeq A_p^0$ *topologisch.*

Bew: F und G seien zwei algebraische Erzeugende von I.

$$T: \Lambda_\infty(\alpha)\times\Lambda_\infty(\alpha) \longrightarrow \Lambda_\infty(\alpha)$$
$$T(x,y) = S(S^{-1}(x)\,F + S^{-1}(y)\,G).$$

Bild T ist isomorph zu I, speziell abgeschlossen. Wir zeigen, daß T linear zahm ist, dann folgt aus 1.11, daß I isomorph zu einem $\Lambda_\infty(\beta)$ ist. Durch Betrachtung der diametralen Dimension folgt wie bei 3.32 die Behauptung.

Seien $(\rho_k)_k$ und $(\sigma_k)_k$ wie in (Z).
Sei $k>\sigma_1$ fest, dann gibt es ein $l\in\mathbb{N}$ mit $\sigma_l\geq k>\sigma_{l-1}$.
$\pi_k(T(x,y)) \leq \pi_{\sigma_l}(S(S^{-1}(x)\,F + S^{-1}(y)\,G)) \leq$
$C_1\|S^{-1}(x)\,F + S^{-1}(y)\,G\|_l \leq C_2(\|S^{-1}(x)\|_{l+1} + \|S^{-1}(y)\|_{l+1})$
$\leq C_3(\pi_{\rho_{l+1}}(x) + \pi_{\rho_{l+1}}(y))$. Wegen (Z)(γ) und $\sigma_l\leq\rho_l$ gilt:
$\frac{\ln \rho_{l+1}}{\ln k} \leq \frac{\ln \rho_{l+1}}{\ln \sigma_l} \frac{\ln \sigma_l}{\ln \sigma_{l-1}} \leq (\sup_j \frac{\ln \rho_{j+1}}{\ln \sigma_j})^2$.

3.38 Beispiele: (s. 3.10 sowie Meise und Taylor [9]):
(1) p sei eine Gewichtsfunktion mit $Cp(z) - C \leq p(2z)$ für ein geeignetes $C>1$. Dann gilt für jedes abgeschlossene Ideal $I\neq\{0\}$ in A_p^0: $I \simeq A_p^0 \simeq \Lambda_\infty(j)$.

(2) Für $\rho>0$ ist $p(z) = |z|^\rho$ eine Gewichtsfunktion, die der Bedingung unter (1) genügt. Die Algebra $A_p^0 =: E_\rho^0$ besteht aus allen ganzen Funktionen, die entweder Ordnung ρ und Typ 0 besitzen oder deren Ordnung echt kleiner als ρ ist.

(3) Für $a\in(0,1)$, $\alpha_j = j(\ln j)^{1/a - 1}$ und

$$p(z) = \exp((\ln(1 + |z|^2))^a)$$

gibt es nach 3.10(2) einen Isomorphismus $A_p^0 \simeq \Lambda_\infty(\alpha)$ mit der Eigenschaft (Z).

(4) Für $s>1$, $a\in\mathbb{R}$ sei
$p(z) = (\ln(1 + |z|^2))^s(\ln\ln(3 + |z|^2))^a$, $\alpha_j = \frac{j^{\frac{s}{s-1}}}{(\ln j)^{\frac{a}{s-1}}}$.
Nach 3.10(3) gilt $A_p^0 \simeq \Lambda_\infty(\alpha)$ vermöge einer Isomorphie mit der Eigenschaft (Z).

3.39 Korollar:

Seien $r>1$, $t\in\mathbb{R}$. $W\neq\{0\}$ *sei ein abgeschlossener Vorwärtsshift-invarianter Unterraum von* $\Lambda_\infty(\mathbb{N}_0, j^r(\ln j)^t)$, *d. h. für die Abbildung*

$$V: \Lambda_\infty(\mathbb{N}_0, j^r(\ln j)^t) \longrightarrow \Lambda_\infty(\mathbb{N}_0, j^r(\ln j)^t),$$
$$V((x_j)_{j\in\mathbb{N}_0}) = (x_{j-1})_{j\in\mathbb{N}_0},\ x_{-1}:=0,$$

gelte $V(W)\subset W$.

Dann gilt $W\simeq\Lambda_\infty(\mathbb{N}_0, j^r(\ln j)^t)$.

Bew: Wie 3.36.

Bemerkung:

Meise, Schwerdtfeger und Taylor zeigen in [8],4.7., daß die echten abgeschlossenen Rückwärtsshift-invarianten Unterräume von $(\Lambda_\infty(j^r))'_b$, $r>1$, endlich-dimensional oder isomorph zum Dualen eines Potenzreihenraums von endlichem Typ sind, also wiederum nie isomorph zum Grundraum. Wegen 3.10(3) gilt dieses Ergebnis von Meise, Schwerdtfeger und Taylor auch für $\Lambda_\infty(j^r(\ln j)^t)'_b$ mit $t\neq 0$.

3.40 Korollar:

Sei $E=H(\mathbb{C})$, E_s^0 *oder* E_r, $1<s<\infty$, $1\leq r<\infty$, *und sei* $W\neq E$ *ein abgeschlossener translationsinvarianter Unterraum von* E, *d. h. für alle* $f\in W$ *und alle* $w\in\mathbb{C}$ *sei auch die Funktion* $z\mapsto f(z+w)$ *in* W.

Dann gilt $W^\perp\simeq E'_b$.

Bew:

$$\text{Sei}\quad F=\begin{cases} E_1 & \text{für } E=H(\mathbb{C}) \\ E_\sigma,\ \sigma=\frac{s}{s-1} & \text{für } E=E_s^0 \\ E_\rho^0,\ \rho=\frac{r}{r-1} & \text{für } E=E_r,\ r>1 \\ H(\mathbb{C}) & \text{für } E=E_1 \end{cases}.$$

Nach Meise, Schwerdtfeger und Taylor [8],4.6., ist $W^\perp$ isomorph zu einem Ideal in F. Dann folgt die Behauptung für $F=E_\sigma$, $\sigma\leq 1<\infty$, aus 3.33(2), für $F=E_\rho^0$, $\rho>1$, aus 3.38(2) und für $F=H(\mathbb{C})$ daraus, daß in $H(\mathbb{C})$ alle abgeschlossenen Ideale Hauptideale sind.

Bemerkung:

Meise, Schwerdtfeger und Taylor haben gezeigt ([8],4.8.), daß in $H(\mathbb{C})$ bzw. E_s^0, $1<s<\infty$, alle abgeschlossenen translationsinvarianten Unterräume endlich-dimensional oder isomorph zu einem Potenzreihenraum unendlichen Typs sind und daß in E_r, $1<r<\infty$, alle echten abgeschlossenen translationsinvarianten Unterräume endlich-dimensional oder isomorph zum Dualraum eines Potenzreihenraums von endlichem Typ sind.

Literaturverzeichnis

1. Berenstein, C. A., Taylor, B. A.: A new look at interpolation theory for entire functions of one variable, Adv. Math. 33, 109-143 (1979).

2. Boas, R. P.: Entire Functions, New York 1954.

3. Dineen, S.: Complex Analysis in Locally Convex Spaces, North Holland Mathematics Studies 57 (1981).

4. Hörmander, L.: An Introduction to Complex Analysis in Several Variables, Princeton 1967.

5. Jarchow, H.: Locally Convex Spaces, Stuttgart 1981.

6. Komatsu, H.: Ultradistributions I, Structure theorems and a characterization, J. Fac. Sci. Tokyo Sec. IA 20, 25-105 (1973).

7. Meise, R.: Sequence space representations for (DFN)-algebras of entire functions modulo closed ideals, J. reine angew. Math. 363, 59-95 (1985).

8. Meise, R., Schwerdtfeger, K., Taylor, B. A.: On kernels of slowly decreasing convolution operators, erscheint in Doga.

9. Meise, R., Taylor, B. A.: Sequence space representations for (FN)-algebras of entire functions modulo closed ideals, erscheint in Studia math.

10. Meise, R., Taylor, B. A.: Splitting of closed ideals in (DFN)-algebras of entire functions and the property (DN), preprint 1986.

11. Meise, R., Vogt, D.: Structure of spaces of holomorphic functions on infinite dimensional polydiscs, Studia math. 75, 235-252 (1983).

12. Michael, E. A.: Locally multiplicatively-convex topological algebras, Mem. Amer. math. Soc. 11 (1952).

13. Mityagin, B. S.: Approximative dimension and bases in in nuclear spaces, Russ. math. Surveys 16, Nr. 4, 59-127 (1961) (Übersetzung von Usp. mat. Nauk 16, Nr. 4, 63-132 (1961)).

14. Mityagin, B. S., Henkin, G. M.: Linear problems of complex analysis, Russ. math. Surveys 26, Nr. 4, 99-164 (1971) (Übersetzung von Usp. mat. Nauk 26, Nr. 4, 93-152 (1971)).

15. Pietsch, A.: Nuclear Locally Convex Spaces, Ergebn. Math. 66, Berlin 1972.

16. Rubel, L. A., Taylor, B. A.: A Fourier series method for meromorphic and entire functions, Bull. Soc. math. France 96, 53-96 (1968).

17. Taylor, B. A.: Some locally convex spaces of entire functions, pp. 431-467 in Proc. Symp. Pure Math. XI (1968).

18. Vogt, D.: Charakterisierung der Unterräume von s, Math. Z. 155, 109-117 (1977).

19. Vogt, D.: Subspaces and quotient spaces of (s), pp 167-187 in "Functional Analysis: Surveys and Recent Results", K. D. Bierstedt, B. Fuchssteiner (Ed.), North Holland Mathematics Studies 27 (1977).

20. Vogt, D.: Charakterisierung der Unterräume eines nuklearen stabilen Potenzreihenraums von endlichem Typ, Studia Math. 71, 251-270 (1982).

21. Vogt, D.: Eine Charakterisierung der Potenzreihenräume von endlichem Typ und ihre Folgerungen, manuscripta math. 37, 269-301 (1982).

22. Vogt, D.: Kernels of Eidelheit matrices and related topics, erscheint in Doga.

23. Vogt. D.: On two problems of Mityagin, preprint 1986.

24. Vogt, D., Wagner, M. J.: Charakterisierung der Quotientenräume von s und eine Vermutung von Martineau, Studia Math. 67, 225-240 (1980).

25. Wagner, M. J.: Unterräume und Quotienten von Potenzreihenräumen, Dissertation, Wuppertal 1977.

26. Zaharjuta, V. P.: Isomorphisms of spaces of analytic functions, Soviet Math. Dokl. 27, No. 3, 631-634 (1980) (Übersetzung aus Dokl. Akad. Nauk CCCP, 225, No. 1 (1980)).

27. Zariski, O., Samuel, P.: Commutative Algebra I, New York 1975.

28. Żelazko, W.: Banach Algebras Amsterdam 1973.

Zusammenfassung

Ist α eine monoton wachsende unbeschränkte Folge positiver Zahlen und ist $R\in\{1,\infty\}$, so bezeichnet man

$$\Lambda_R(\alpha) = \{x\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum |x_i| r^{\alpha_i} < \infty \text{ für alle } r<R\}$$

für $R=1$ als Potenzreihenraum endlichen und für $R=\infty$ als Potenzreihenraum unendlichen Typs.

Wir zeigen: Ist E eine lokal multiplikativ-konvexe Algebra (d.h. projektiver Limes von Banachalgebren), welche isomorph zu einem nuklearen $\Lambda_1(\alpha)$ mit $\lim \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j} = 1$ ist, und ist $A: E \to \prod B_j$ ein stetiger surjektiver Algebrenhomomorphismus von E auf ein Produkt kommutativer Banachalgebren mit 1, so gilt Kern $A \simeq E$.
Dieser Satz impliziert den folgenden: Sei Ω eine stark pseudokonvexe zusammenhängende Steinsche Mannigfaltigkeit, sei $(z_j)_j$ eine Folge paarweise verschiedener Punkte in Ω, welche keinen Häufungspunkt besitzt. Für jedes j sei I_j ein endlich-codimensionales Ideal im lokalen Ring $\mathcal{O}_{z_j}$. Dann ist das Ideal

$$I = \{f\in H(\Omega) \mid [f]_{z_j} \in I_j \text{ für alle } j\}$$

linear homöomorph zu $H(\Omega)$.

Eine Funktion $p: \mathbb{C} \to [0,\infty)$ heiße Gewichtsfunktion, falls p stetig, subharmonisch und radial ist und falls gelten $\ln(1+|z|^2) = o(p(z))$ und $p(2z) = O(p(z))$. Wir betrachten die (DFN)-Algebra

$$A_p = \{f\in H(\mathbb{C}) \mid \text{ es gibt } A>0 \text{ mit } \sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)| \exp(-Ap(z)) < \infty\}$$

bzw. die (FN)-Algebra

$$A_p^0 = \{f\in H(\mathbb{C}) \mid \text{ für alle } \varepsilon>0: \sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)| \exp(-\varepsilon p(z)) < \infty\}.$$

Wir zeigen: Jedes abgeschlossene Ideal in A_p bzw. in A_p^0 wird algebraisch von zwei Elementen erzeugt. Daraus folgern wir: Ist A_p isomorph zum Dualen eines Potenzreihenraums, so sind alle abgeschlossenen Ideale $I\neq\{0\}$ in A_p isomorph zu A_p, und ist A_p^0 isomorph zu einem Potenzreihenraum und erfüllt der Isomorphismus gewisse Zusatzbedingungen, so ist jedes abgeschlossene Ideal $I\neq\{0\}$ in A_p^0 isomorph zu A_p^0.

Druck und Verarbeitung: Dissertations Druck Darmstadt, Tel. 0 61 51 / 21 3 53